

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TPC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
 - Ne pas utiliser de correcteur.
 - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
-

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème indépendants.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer leurs réponses.

EXERCICE 1

Sur la plage, les drapeaux hissés près des postes de secours avertissent des conditions de baignade liées à l'état de la mer et à la météo.

Les significations des couleurs de drapeaux sont les suivantes :

- drapeau vert : la baignade est surveillée et ne présente pas de danger apparent ;
- drapeau jaune : la baignade est surveillée avec danger limité ou marqué ;
- drapeau rouge : la baignade est interdite.

La couleur d'un drapeau est déterminée par de nombreux facteurs tels que la météo, l'état de la mer ou la présence de sauveteurs pour assurer la sécurité des baigneurs.

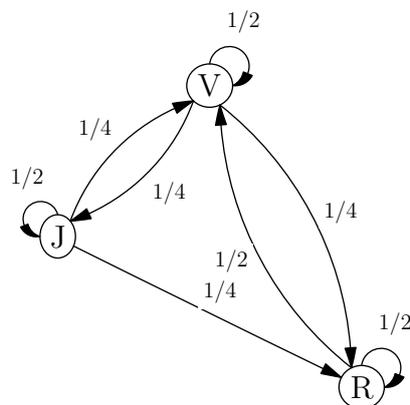
Dans cet exercice, on considère que la couleur d'un drapeau est fixée quotidiennement et on modélise le changement de couleur selon les règles simplifiées suivantes :

- si le drapeau est vert un jour, le lendemain il peut être vert avec une probabilité $\frac{1}{2}$, jaune avec une probabilité $\frac{1}{4}$ et rouge sinon ;
- si le drapeau est jaune un jour, le lendemain il peut être vert avec une probabilité $\frac{1}{4}$, jaune avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et rouge sinon ;
- si le drapeau est rouge un jour, le lendemain il peut être vert avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et rouge sinon. Un drapeau rouge ne peut donc pas passer à l'état jaune le jour suivant.

On note :

- V_n l'évènement " le drapeau est vert le n^e jour " et $v_n = P(V_n)$;
- J_n l'évènement " le drapeau est orange le n^e jour " et $j_n = P(J_n)$;
- R_n l'évènement " le drapeau est rouge le n^e jour " et $r_n = P(R_n)$.

La situation est résumée sur la **figure suivante** :



On suppose que le drapeau est vert le jour numéro 0.

- Q1.** a) Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'un système complet d'évènements à préciser, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n , j_n et de r_n .
- b) Obtenir de même des expressions de j_{n+1} et de r_{n+1} en fonction de v_n , j_n et de r_n .
- c) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ j_n \\ r_n \end{pmatrix}$. Préciser X_0 . Justifier que $X_{n+1} = AX_n$ avec :

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Q3.** Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice A dans la base canonique \mathcal{B} .
- a) On pose $e'_1 = (4, 2, 3)$, $e'_2 = (1, -1, 0)$ et $e'_3 = (a, 0, b)$. Déterminer a et b pour :
- que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ soit une base de \mathbb{R}^3 ,
 - et que, dans cette base \mathcal{B}' , la matrice de f soit :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

- b) Préciser la matrice de passage Q de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' . Calculer Q^{-1} .
- c) Déterminer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On attend l'expression détaillée des coefficients de cette matrice.
On pourra utiliser le binôme de Newton sur une expression du type $D + N$ où D et N sont deux matrices bien choisies.
- d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire une expression de X_n en fonction de n , T , Q et de X_0 .

- Q4.** À l'aide des résultats précédents, déterminer des expressions explicites pour v_n , j_n et r_n .

- Q5.** Au bout d'un grand nombre de jours, quelle est la couleur la plus probable pour le drapeau ?