Devoir surveillé n°7 - Mathématiques

Durée : 4 heures - Calculatrice interdite

Problème 1 : Suite et calcul matriciel (CCINP 2023)

On considère les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = \phantom{2u_n -{}} v_n + w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \end{cases}$$

On note :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et, pour tout} \quad n \geqslant 0,\ X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

Éléments propres d'une matrices

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$dont A est la matrice dans la base canonique.

1. On note $\chi_A(x)$ le déterminant de la matrice $xI_3 - A$. Montrer que le polynôme caractéristique χ_A de A a pour expression : $\chi_A(x) = (x-2)(x-1)^2$.

Pour $\lambda \in \{1, 2\}$, on note

$$E_\lambda = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Déterminer une base de E_1.
3. Déterminer une base de E_2.
4. A-t-on $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^3$?

Réduction de A

On considère les éléments suivants de $\mathbb{R}^3$: $b_1 = (0, 1, 1)$, $b_2 = (1, 1, 0)$ et $b_3 = (0, 0, 1)$.

5. Montrer que $\mathscr{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Montrer que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathscr{B}$.

   Déterminer P et vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Déterminer une relation entre A, P, T P^{-1}.

Calcul des puissances de T et expression de u_n, v_n, w_n

9. On note $T = N + D$, où D est une matrice diagonale et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer D et vérifier que N et D commutent.
10. Que vaut N^n pour tout entier $n \geqslant 2$?
11. Déduire de ce qui précède une expression de T^n. On donnera chacun de ses coefficients.
12. Pour $n \in \mathbb{N}$, établir une relation entre X_{n+1}, A et X_n.
13. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de X_n en fonction de A, n et X_0.
14. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de T^n, P et P^{-1}. Démontrer cette relation par récurrence.
15. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n, v_n et de w_n en fonction de n.

Problème 2 : Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

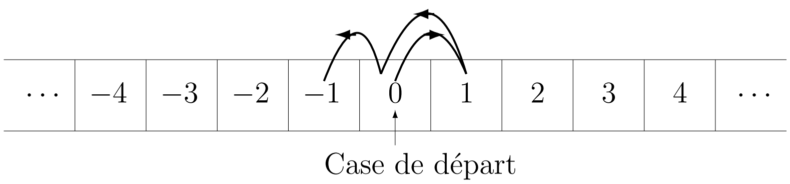
$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x) \, \mathrm{d}x.$$

16. Calculer W_0 et W_1.
17. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) = \dfrac{\cos(2x) + 1}{2}$.
18. On note $\Phi : x \mapsto \dfrac{1}{4}\sin(2x) + \dfrac{1}{2}x$. Déterminer $\Phi'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
19. Calculer W_2.
20. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $u : x \mapsto \cos^{n+1}(x)$. Calculer $u'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
21. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$W_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) \cos^n(x) \, \mathrm{d}x.$$
22. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$
23. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}.$$
    Indication : On pourra procéder par récurrence.
24. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n > 0$.
25. Montrer que la suite (W_n) est décroissante.
26. En déduire que la suite (W_n) est convergente. On pose $\ell = \lim W_n$.
27. Déterminer ℓ.

28. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1.$$
En déduire que $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$.
29. Montrer que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
30. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$W_{2n} = \frac{\pi}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}.$$

Exercice de probabilités

Dans tout l'énoncé, n désigne un entier naturel non nul. Une puce se déplace sur une bande formée de cases numérotées ainsi :



A chaque seconde, la puce effectue l'une des deux actions suivantes :

— ou bien elle saute d'une case vers la droite, (on dira que la puce "va à droite")

— ou bien elle saute d'une case vers la gauche (on dira que la puce "va à gauche").

Ces choix s'effectuent aléatoirement. On suppose que la probabilité que la puce aille à gauche est de $\frac{1}{2}$, que la probabilité que la puce aille à droite est de $\frac{1}{2}$, et que les différents sauts de la puce sont indépendants.

Dans tout le problème, on étudie le comportement de la puce sur n secondes, de la première seconde à la n^{eme} seconde. Ainsi, la puce effectue n sauts en tout. De plus, on suppose que la puce, avant les n sauts, part de la case numérotée 0.

Par exemple sur la figure, la puce a effectué $n = 3$ sauts ; le premier saut est vers l'avant, et les deux suivants sont vers l'arrière.

On appelle D la variable aléatoire désignant le numéro de la case sur laquelle la puce se retrouve au bout des n sauts.

A. Etude de D dans des cas particuliers

1. Quel est le numéro de la case la plus à droite sur laquelle la puce puisse se retrouver ? On rappelle que la puce part de la case 0 et effectue n sauts.
2. Dans cette question on suppose que $n = 2$.
   (a) Indiquer ce que signifient, en français, chacun des trois événements suivants :
   $$(D = 0); (D = 1); (D = 2)$$
   Donner leur probabilité. *Remarque : l'un de ces trois événements a une probabilité nulle.*
   (b) Donner aussi $P(D = -1)$ et $P(D = -2)$.
   (c) Calculer alors, dans le cas $n = 2$, l'espérance et la variance de D.
3. Lorsque $n = 3$, donner l'ensemble des valeurs prises par D et la loi de D.

B. Etude de D dans le cas général

On revient au cas général, n est donc un entier naturel non nul quelconque.

1. On appelle X le nombre de fois, parmi les n sauts effectués, où la puce va à droite. En reconnaissant une loi usuelle, donner la loi de X (on ne demande pas d'en rappeler la formule).
2. On appelle Y le nombre de fois, parmi les n sauts, où la puce va à gauche. Exprimer Y en fonction de X.
3. Expliquer, de façon très claire, pourquoi on a la relation $D = 2X - n$. *On rappelle que la puce part de la case numérotée* 0.
4. Donner l'espérance et la variance de D en fonction de n. Interpréter la valeur trouvée pour l'espérance.

C. Etude de D dans un autre cas

Dans cette dernière partie, on conserve le même cadre mais on modifie la loi des sauts de la puce.

Ce qui ne change pas : La puce part toujours de la case 0, et à chaque seconde, elle "va à droite" ou elle "va à gauche". Elle effectue n sauts, et les sauts de la puce sont toujours aléatoires.

Ce qui change : On **ne** suppose **plus** que la probabilité que la puce aille à gauche est de $\frac{1}{2}$, que la probabilité que la puce aille à droite est de $\frac{1}{2}$, et on **ne** suppose **plus** que les différents sauts de la puce sont indépendants.

Par contre, on suppose que les sauts de la puce dépendent a priori du mouvement précédent ; cela se traduit par le phénomène suivant :

— si la puce vient d'aller à droite, alors elle a, à la seconde qui suit, une probabilité $\frac{2}{3}$ d'aller à droite, et une probabilité $\frac{1}{3}$ d'aller à gauche ;

— si la puce vient d'aller à gauche, alors elle a, à la seconde qui suit, une probabilité $\frac{2}{3}$ d'aller à gauche, et une probabilité $\frac{1}{3}$ d'aller à droite.

Enfin, lors du premier mouvement la puce part de la case 0 et va à droite avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et va à gauche avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on appelle A_k l'événement : (À la seconde k, la puce va à droite). On note $a_k = P(A_k)$.

1. D'après l'énoncé, quelle est la valeur de a_1 ?
2. (a) En lisant l'énoncé, donner pour tout entier $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, la probabilité conditionnelle de l'événement A_{k+1} sachant A_k (c'est-à-dire $P(A_{k+1}|A_k)$).

   (b) En déduire $P(A_2|A_1)$, $P(A_2|A_1^c)$ puis $P(A_2)$.

   (c) Calculer, pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, la probabilité $P(A_{k+1}|A_k^c)$ puis montrer que :

$$a_{k+1} = \frac{1}{3}a_k + \frac{1}{3}.$$

   On pourra utiliser, dans les questions (b) et (c), la formule des probabilités totales.

3. Le but de cette question est de calculer a_k en fonction de l'entier $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. À cet effet on pose, pour tout entier k compris entre 1 et n, $b_k = a_k - \dfrac{1}{2}$.

   (a) Montrer que pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, on a $b_{k+1} = \dfrac{1}{3}b_k$.

   (b) Donner alors l'expression de b_k en fonction de l'entier naturel k.

   (c) En déduire l'expression de a_k en fonction de k.

4. On appelle Z_k la variable aléatoire qui vaut 1 si l'événement A_k est réalisé, et qui vaut -1 sinon.

   (a) Donner l'ensemble des valeurs prises par Z_k.

   (b) Déterminer la loi de Z_k et calculer l'espérance de Z_k.

5. Expliquer pourquoi on a $D = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$.
6. Donner alors l'espérance de D en fonction de n.

Fin de l'épreuve