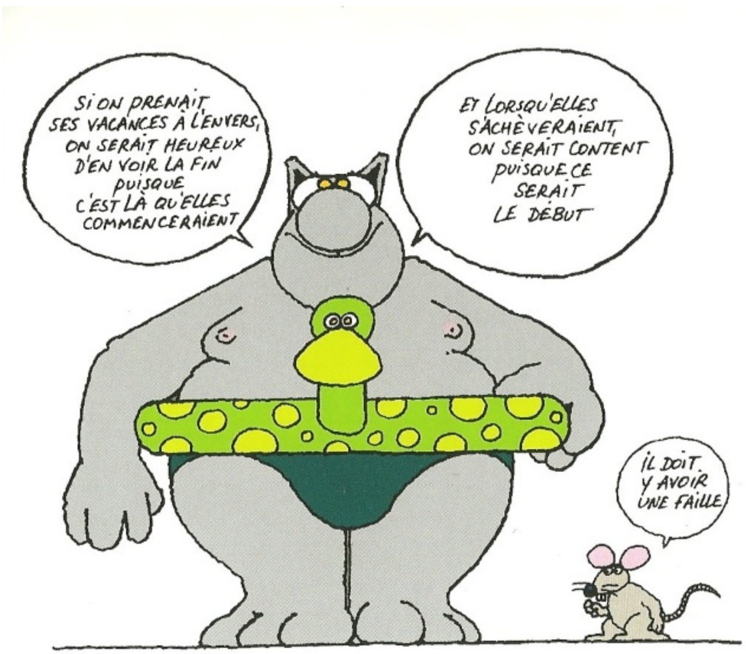
Cahier de Vacances

De la première à la deuxième année de TSI



Charlotte SCHOLL

Lycée Louis Vincent

Été 2025

Jour 1 : majorations, minorations, encadrements

Calcul

1) Simplifier $\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{7}$; 2) Écrire $\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}$ sans racine au dénominateur ;

3) Simplifier $\dfrac{\frac{2}{7}+\frac{1}{3}}{\frac{2}{7}-\frac{1}{3}}$. 4) Résoudre $x^2-x+1=0$.

Questions de cours

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Définir « f est une fonction strictement croissante » et « f est une fonction impaire ».

Exercice

Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{x+1}{x+2} \leqslant \dfrac{2}{3}$.

Indication : Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x+1}{x+2}$ *sur l'intervalle* $[0,1]$.

Jour 2 : Loi binomiale

Calcul

Écrire sous la forme d'une fraction irréductible

$$A = \frac{6^3}{9^3}, \quad B = \left(\frac{6}{7}\right)^2 \times \left(-\frac{14}{3}\right)^2, \quad C = \frac{\left(\frac{4}{7}\right)^3}{\left(-\frac{2}{7}\right)^4}.$$

Question de cours

Définir $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$. Que vaut $E(X)$? $V(X)$? $\sigma(X)$?

Application

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres 4 et $\frac{1}{3}$.
Déterminer :

1. le support de X ; prendre $X)$;
2. pour tout $i \in X(\Omega)$, $P(X = i)$;
3. l'espérance, la variance, l'écart-type de X ;
4. $P(X \geqslant 2)$;
5. $P(X \leqslant 3)$.

Jour 3 : Polynômes de degré 2

Calcul

Développer : 1) $(2x-3)^2$ et 2) $(a+b+c)^2$.
Factoriser : 3) $9x^2 - 6x + 1$ et 4) $9x^4 - 4x^2$.

Question de cours

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Racines de $f(x)$? Signe de $f(x)$? Représentation graphique ? Factorisation de l'expression $f(x)$?

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes :

1. $3x^2 - 5x + 2 = 0$.
2. $3x^2 - 6x + 2 = 0$.
3. $4x^2 + 8x + 4 = 0$.
4. $x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$ (Changement de variables $X = \sqrt{x}$).
5. $e^{2x} + e^x - 3 = 0$ (Changement de variables $X = \mathrm{e}^x$).

Exercice 2

Déterminer les extrema de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$. (On déterminera le tableau de variations de la fonction f.)

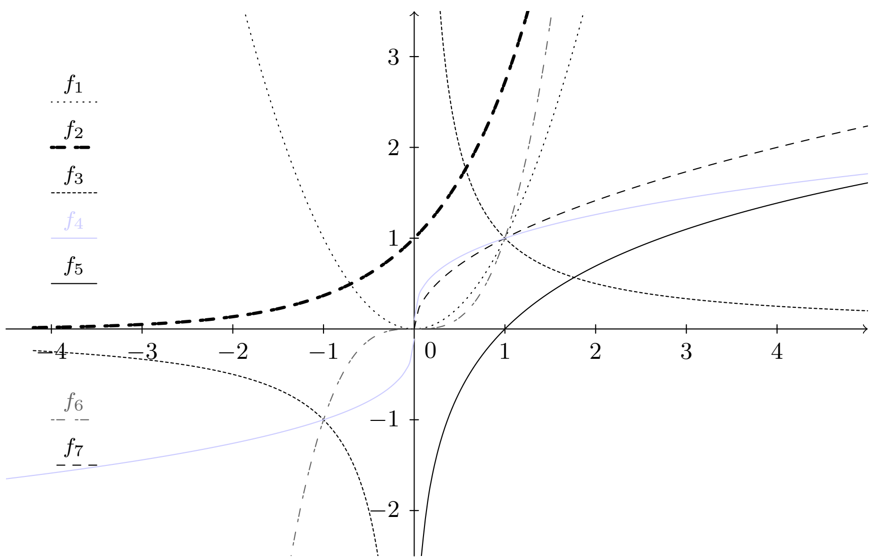
Jour 4 : Principe de récurrence

Calcul

1) Résoudre l'inéquation $\dfrac{2-5x}{x-1} \geqslant 0$. (On dressera un tableau de signes)
2) Déterminer la dérivée de la fonction $x \longmapsto \ln(x+e^{2x})$.

QCM

Sur la figure suivante, sont présentés les graphes des fonctions $x \longmapsto e^x$, $x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$, $x \longmapsto \ln(x)$, $x \longmapsto x^3$, $x \longmapsto \sqrt{x}$ et $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$. Identifiez les !



Exercice 1

Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 2 Une récurrence double

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3n+1$.

Jour 5 : Systèmes linéaires et pivot de Gauss

Calcul

Simplifier les expressions suivantes :

$A = \dfrac{8064}{720}$, $\quad B = 2\sqrt{32} - 3\sqrt{50} + 6\sqrt{8}$, $\quad C = \dfrac{12}{\frac{5}{6}}$,
$D = \left(\sqrt{3}+1\right)^2 - \left(\sqrt{3}-1\right)^2$.

Question de cours

Énoncer le théorème du rang.

Exercice 1 - Vocabulaire

1. Résoudre le système suivant d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ en utilisant la méthode de Gauss :
$$(S)\ \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 3y & + & 3z & = & 7 \\ 3x & + & 4y & + & 5z & = & 11 \end{array}\right. .$$
2. Le système (S) est-il compatible ?
3. Le système (S) est-il homogène ?

Exercice 2 - Système paramétré

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère le système suivant d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:
$$(S)\ \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & z & = & 2+2a \\ x & + & y & + & z & = & 4 \\ x & + & y & + & az & = & 3+a \end{array}\right. .$$

1. Calculer $\det(S)$.
2. Résoudre $\det(S) = 0$.
3. Discuter le nombre de solutions du système (S) en fonction de la valeur de a.

Jour 6 : Calcul algébrique

Calcul

Simplifier les expressions suivantes :
$A = \binom{10}{2}$; $\quad B = \binom{13}{12}$; $\quad C = \binom{n}{1}$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$, $\quad D = \binom{n}{2}$ avec $n \geqslant 2$ un entier, $\quad E = \dfrac{\binom{n+1}{2}}{\binom{n}{2}}$ avec $n \geqslant 2$ un entier, $\quad F = \binom{n+1}{n-1}$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$.

Question de cours et application

Rappeler la formule du binôme de Newton et calculer les sommes suivantes :
$$R = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 2^k 3^{10-k}, \quad S = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} \quad \text{et} \quad T = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \frac{1}{2^k}.$$

Exercice 1 - Sommes et produits téléscopiques

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et
$$S = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$
Montrer $S = \ln(n+1)$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a
$$\prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{n+1}{2}.$$

Jour 7 : Informatique

Calcul

On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ et

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	

Compléter le tableau précédent pour qu'il corresponde bien à une loi de probabilité d'une variable discrète.
Calculer l'espérance et la variance de X.

À compléter

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
1		$\exp(x)$	
x		$\ln(x)$	
x^2		$\sqrt{x}$	
$\frac{1}{x}$		$x^{1/3}$	

Exercice - Racines d'un polynôme du second degré

1. Créer une fonction discriminant(a,b,c) qui prend en argument trois flottants a, b, c et qui renvoie le discriminant Δ du trinôme ax^2+bx+c.
2. Afficher le discriminant des polynômes suivants : $x^2 - 2x + 1$, $x^2 - 4$ et $x^2 + x + 1$.
3. Créer une fonction racines(a,b,c) qui prend en argument trois flottants a, b, c et qui renvoie la liste des solutions réelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dans le cas $a \neq 0$.

   Par exemple,
   racines(1,-2,1) renvoie [1]
   racines(1,0,-4) renvoie $[-2, 2]$
   racines(1,1,1) renvoie []

Jour 8 : Calcul matriciel

Calcul

Calculer AB et BA, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Questions de cours

1. Énoncer le théorème de la limite monotone.
2. Énoncer la formule de Leibniz.

Exercice 1 - Puissances d'une matrice

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calculer PDP^{-1}.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, D^n.
5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.

Jour 9 : Suites réelles (1)

Calcul

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right) \quad \text{et} \quad B = \frac{\mathrm{e}^{4\ln(2)+\ln(5)}}{\mathrm{e}^{\ln(16)}}.$$

Question de cours

Définir « la suite (u_n) est une suite géometrique ». Quelle est l'expression de u_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice - Convergence d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 4 - \frac{3}{u_n}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant u_n \leqslant 3$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Que peut-on en déduire ? Déterminer $\lim u_n$.

Jour 10 : Suites réelles (2)

Calcul

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \sin(2x), \quad x \mapsto \mathrm{e}^{3x}, \quad x \mapsto \frac{1}{4x-1}.$$

Question de cours

Définir « suites adjacentes ».

Exercice - Suites adjacentes

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En déduire qu'elles sont convergentes. En utilisant votre calculatrice, donner une approximation de leur limite à 10^{-2} près par excès.

Jour 11 : Intégration par parties

Calcul

Résoudre les équations $(2x-5)^2 = (1-3x)^2$ et $\sqrt{x+2} = x$.

À compléter

$f(x)$	$\int f(x)dx$	$f(x)$	$\int f(x)$
1		$\frac{1}{x}$	
x		$\frac{1}{x^2}$	
x^2		$\frac{1}{\sqrt{x}}$	
$\sqrt{x}$		$\exp(x)$	

Question de cours

Rappeler la formule d'intégration par parties en citant ses hypothèses.

Exercice 1 - Calcul d'une intégrale

À l'aide d'une intégration par parties, déterminer $\displaystyle\int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 - Primitive et intégrale

Soit $x > 0$ fixé et $n \in \mathbb{N}$. On considère $I = \displaystyle\int_1^x t^n \ln(t) dt$. Calculer I en utilisant une intégration par parties. En déduire l'ensemble des primitives de la fonction $x \longmapsto x^n \ln(x)$.

Jour 12 : Probabilités conditionnelles (1)

Calcul

Simplifier les fractions suivantes (on ne cherchera pas ici le domaine sur lequel les simplifications sont légales) :
$A = \dfrac{x^2+2x+1}{(x+1)(x-1)}, \quad B = \dfrac{1-x}{x-1}, \quad C = \dfrac{1+\frac{1}{x}}{x+1},$
$D = \dfrac{(x+1)^2 - x - 1}{x+1}, \quad E = \dfrac{2(x+3)^2+4}{2}.$

Questions de cours

Rappeler les formules suivantes :

1. Formule de Bayes ;
2. Formule des probabilités composées ;
3. Formule des probabilités totales.

Exercice - Test de dépistage

Une maladie est présente dans la population dans la proportion d'une personne malade sur 10000. Un laboratoire pharmaceutique propose un nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à $0,1\%$. Quelle est la probabilité qu'une personne soit malade sachant que son test est positif ? Qu'en pensez-vous ?

On notera M l'événement ≪ être malade ≫ et T l'événment ≪ être positif au test ≫.

Jour 13 : Probabilités conditionnelles (2)

Calcul

Déterminer le domaine de définition de la fonction

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 1\right) + \sqrt{x}.$$

Exercice : Probabilités et suites

Un professeur oublie fréquemment ses clés. On suppose que le premier jour, il les oublie avec une probabilité $p_1 = 1/10$. Ensuite, si un jour donné il les oublie, le jour suivant il les oublie avec une probabilité $1/10$. A contrario, s'il ne les oublie pas un jour donné, le lendemain il les oublie avec la probabilité $4/10$. On note A_n l'événement ≪ le professeur oublie ses clés le n-ième jour ≫ et $p_n = P(A_n)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer $P\left(A_{n+1} \middle| A_n\right)$ et $P\left(A_{n+1} \middle| \overline{A_n}\right)$. Les représenter sur un arbre.
2. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que
$$p_{n+1} = \frac{1}{10}p_n + \frac{4}{10}(1-p_n).$$
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$p_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}p_n.$$
3. Déterminer ℓ tel que
$$\ell = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}\ell.$$
On pose $v_n = p_n - \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{3}{10}$. En déduire une expression de v_n, puis une expression de p_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Déterminer la limite de la suite (p_n). Interpréter le résultat.

Jour 14 : Polynômes

Question de cours et application

1. Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$? de $\mathbb{R}[X]$?
2. Déterminer les racines de $P(X) = X^3 + 2X^2 + X$.
3. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.
4. En déduire l'ordre de multiplicité de chacune de ses racines ?

Exercice 2 - Division euclidienne (en pratique)

On considère le polynôme $P(x) = 6x^3 - 13x^2 + 9x - 2$.

1. Déterminer une racine évidente de $P(x)$.
2. Factoriser le polynôme $P(x)$ à l'aide d'une division euclidienne.
3. Déterminer les solutions de l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 3 Division euclidienne (plus théorique)

1. Déterminer les racines et factoriser le polynôme $X^2 - 3X + 2$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.

Jour 15 : Étude de fonction (1)

Calcul

Résoudre dans $]-\pi, \pi]$, puis dans $\mathbb{R}$, l'inéquation

$$\cos(x) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice - Première partie

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction f est impaire. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = 1 - f(x)^2 = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}.$$
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$
En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement ce résultat.

Jour 16 : Etude de fonction (2)

Calcul

Calculer

$$S = \sum_{k=0}^{9} \left(2^k + 4k + 5\right).$$

Question de cours

Donner les développements limités en $x = 0$ à l'ordre $n = 4$ des fonctions :

$$x \mapsto \exp(x), \quad x \mapsto \cos(x), \quad x \mapsto \frac{1}{1+x}, \quad x \mapsto \ln(1+x).$$

Exercice - Suite de l'exercice de la veille

5. Dresser le tableau de variations de f sur $[0;+\infty[$.
6. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur I, un intervalle à préciser.

   On note f^{-1} sa bijection réciproque.
7. Montrer que f^{-1} est dérivable sur I et déterminer l'expression de sa dérivée.

Jour 17 : Complexes (1)

Calcul

Écrire sous forme algébrique les complexes $z_1 = (2+\mathbf{i})^3$ et $z_2 = \dfrac{4+3\mathbf{i}}{1+2\mathbf{i}}$

Questions de cours

Rappeler les formules d'Euler et de Moivre, ainsi que la définition de $\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$.

Exercice 1 - Formes exponentielle et algébrique

Soient $z_1 = \sqrt{6} - \mathbf{i}\sqrt{2}$ et $z_2 = 1 - \mathbf{i}$.

1. Écrire sous forme exponentielle les complexes z_1 et z_2.
2. En déduire la forme exponentielle le complexe $\dfrac{z_1}{z_2}$.
3. Montrer que $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{i}$.
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Jour 18 : Complexes (2)

Calcul

Calculer

$$\int_2^3 \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x$$

Question de cours

Énoncer le théorème de Rolle.

Exercice 1 - Linéarisation

1. Linéariser $\cos^3(x)$.
2. En déduire $\int_0^{\pi/2} \cos^3(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 - Second degré dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 + (1+2\mathbf{i})z + (\mathbf{i}-1) = 0,$$

en rappelant toutes les formules du cours.

Jour 19 : Bijection

Calcul

Déterminer la limite suivante

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+2} - \sqrt{x}.$$

Indication : On pensera à utiliser son expression conjuguée.

À compléter

$(u(x)+v(x))'$		$(\sqrt{u(x)})'$	
$(u(x)\times v(x))'$		$(e^{u(x)})'$	
$\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'$		$(\ln(u(x)))'$	
$(u(x)^\alpha)'$		$(f(u(x)))'$	

Exercice - Théorème de la bijection

On note I l'intervalle $[0,2]$.

1. Montrer que la fonction $f(x) = x^2 + x + 1$ réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
2. Résoudre $f(x) = 3$. En déduire $f^{-1}(3)$.
3. Déterminer $f^{-1}(1)$ et $f^{-1}(7)$.
4. Montrer que pour tout $x \in J$, $f^{-1}(x) = \dfrac{-1+\sqrt{4x-3}}{2}$.

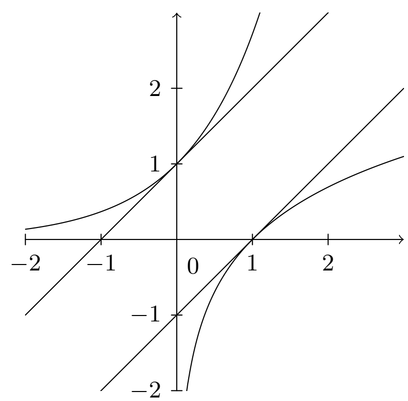
Jour 20 : Informatique

Calcul

Calculer l'inverse des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

QCM

Sur le dessin suivant sont représentées les fonctions $x \longmapsto x-1$, $x \longmapsto x+1$, $x \longmapsto e^x$, $x \longmapsto \ln(x)$. Identifiez-les. Quelles inégalités "classiques" retrouve-t-on graphiquement ? Justifiez-les.



Exercice - Compteur de voyelles

Écrire un programme en Python qui demande à l'utilisateur de saisir une chaîne de caractères `mot` et qui renvoie le nombre de voyelles contenues dans cette chaîne de caractères.

<u>Algorithme</u>

```
Saisir un mot (sans accent)
Mettre toutes les lettres en minuscules
Créer la liste des voyelles
Initialiser le compteur de voyelles
Parcourir les lettres du mot
    Si c'est une voyelle
        Incrémenter le compteur
Afficher le nombre de voyelles.
```

Jour 21 : Continuité et dérivabilité

Calcul

Déterminer la dérivée, ainsi qu'une primitive de la fonction

$$x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^x}{3\mathrm{e}^x + 1}.$$

QCM

Relier chacune des fonctions suivantes à “son” équivalent en 0.

a) $\ln(1+x)$	1) $\frac{1}{3}x$
b) $\sqrt{1+x} - 1$	2) $\ln(2)$
c) $(1+x)^{1/3} - 1$	3) $x\sqrt{2}$
d) $e^x - 1$	4) $\frac{1}{2}x$
e) $x^8 + \sqrt{2}x$	5) x
f) $\ln(2+x)$	6)x^8

Exercice

On considère la fonction f dont l'expression est $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Justifier que f est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera $\tilde{f}$ son prolongement.
4. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et calculer pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $f'(x)$.
5. Déterminer un développement limité d'ordre 2 en $x = 0$ de $f(x)$.
6. En déduire que f est dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.
7. Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}_f$ en $x = 0$, ainsi que leur position relative.

Jour 22 : Algèbre linéaire (1)

Calcul

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$ (changement de variable $u = \cos x$).

Questions de cours

Rappeler les propriétés de croissance et de positivité de l'intégrale.

Exercice - Familles libres et liées

Les familles suivantes sont-elles libres ? Dans la cas contraire, déterminer une relation linéaire liant ses vecteurs.

1. Dans $\mathbb{R}^3$,
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$
2. Dans $\mathbb{R}[X]$,
$$P = 1, \quad Q = 1 + X + X^2 \quad \text{et} \quad R = 1 + 2X.$$

Jour 23 : Algèbre linéaire (2)

Calcul

Déterminer la dérivée, ainsi qu'une primitive de la fonction

$$x \longmapsto x\mathrm{e}^{x^2}.$$

Question de cours

Énoncer la formule de Taylor-Young en $x = 0$ à l'ordre $n = 4$.

Exercice - Sous-espaces vectoriels en dimension finie

On considère l'ensemble

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, x + 2y - 3z = 0 \right\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Résoudre l'équation $x + 2y - 3z = 0$, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une famille génératrice de F.
4. Montrer que cette famille est libre.
5. Que peut-on en déduire ?

Jour 24 : Algèbre linéaire (3)

Calcul

À l'aide du changement de variables $u = 1 + \sqrt{t}$, calculer

$$\int_1^4 \frac{1}{(1+\sqrt{t})\sqrt{t}} \,\mathrm{d}t.$$

Question de cours

Énoncer la formule de Grassmann.

Exercice - Noyau et image

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - y - z).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.
3. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Jour 25 : Algèbre linaire (4)

Calcul

1. Déterminer a et b des réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$,
$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$
2. En déduire
$$\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x.$$

Cours et application

1. Énoncer et illustrer le théorème des accroissements finis.
2. En appliquant ce théorème à la fontion $x \mapsto \ln(x)$ sur l'intervalle $[2,3]$, montrer que $\dfrac{1}{3} \leqslant \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Exercice - Bases et coordonnées

On considère les polynômes suivants de $\mathbb{R}_3[X]$:

$$P_0 = 1 \quad P_1 = X \quad P_2 = X(X+1) \quad P_3 = X(X+1)(X+2).$$

1. Pourquoi la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est-elle libre ?
2. En déduire que c'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Déterminer $\mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2,P_3)}(2+3X)$.

Jour 26 : Algèbre linaire (5)

Questions de cours

Les fonctions trigonométriques réciproques : arcsin,arccos et arctan.

(Définition, dérivée et représentation graphique)

Exercice - Changement de bases

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose $u = (1,0,1)$, $v = (1,1,0)$ et $w = (1,1,1)$.

1. Montrer que la famille $\mathscr{C} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{C}$. On note D cette matrice.
3. Justifier que $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Jour 27 : Équations différentielles

Calcul

Calculer
$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Question de cours

Énoncer la formule du crible.

Exercice

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $(E_1)\quad (1+x^2)y' = 2xy.$
2. $(E_2)\quad y'' - 3y' + 2y = 0.$
3. $(E_3)\quad y'' + y' + y = 0.$