Pour s'entraîner – Correction
Les complexes

Représentation dans le plan

Exercice 1. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1. Soit D le point de coordonnées $(1; -2)$. Quel est son affixe ?
   Le point D apour affixe $1 - 2\mathbf{i}$.

Soient A, B, C les points d'affixes respectives

$$z_A = 1 + \mathbf{i}, \quad z_B = 2\mathbf{i}, \quad z_C = 3.$$

2. Placer les points A, B, C.
   Le point A a pour coordonnées $(1, 1)$.
   Le point B a pour coordonnées $(0, 2)$.
   Le point C a pour coordonnées $(3, 0)$.
3. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
   $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 2\mathbf{i} - (1 + \mathbf{i}) = -1 + \mathbf{i}$
   $z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = 3 - (1 + \mathbf{i}) = 2 - \mathbf{i}$
   $z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B = 3 - 2\mathbf{i}$

Exercice 2. Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

1. $|z| = 3$
2. $\mathrm{Re}(z) = -2$
3. $\mathrm{Im}(z) = 1$

Correction :

1. Il s'agit du cercle de centre O l'originie du repère et de rayon 3.
2. Il s'agit de la droite verticale d'équation $x = -2$.
3. Il s'agit de la droite horizontale d'équation $y = 1$.

Forme algébrique d'un nombre complexe

Exercice 3. Écrire sous forme algébrique les complexes suivants et identifier leurs parties réelle et imaginaire :

1.

$$\begin{aligned} z &= (3 + 2\mathbf{i}) - (1 - 3\mathbf{i}) \\ &= \boxed{2 + 5\mathbf{i}} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} z &= 6 + \mathbf{i} - (2 + 4\mathbf{i}) \\ &= \boxed{4 - 3\mathbf{i}} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} z &= (1 + 2\mathbf{i})(4 + 3\mathbf{i}) \\ &= 4 + 3\mathbf{i} + 8\mathbf{i} + 6\mathbf{i}^2 \\ &= \boxed{-2 + 11\mathbf{i}} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} z &= (3 - \mathbf{i})(2 + 7\mathbf{i}) \\ &= 6 + 21\mathbf{i} - 2\mathbf{i} - 7\mathbf{i}^2 \\ &= \boxed{13 + 19\mathbf{i}} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} z &= (1+\mathbf{i})^2 \\ &= 1 + 2\mathbf{i} + \mathbf{i}^2 \\ &= \boxed{2\mathbf{i}} \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} z &= \left(3 + \mathbf{i}\sqrt{5}\right)\left(3 - \mathbf{i}\sqrt{5}\right) \\ &= 3^2 - \left(\sqrt{5}\mathbf{i}\right)^2 \\ &= 9 - \sqrt{5}^2\mathbf{i}^2 \\ &= \boxed{14} \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} z &= (2 - 5\mathbf{i})^2 \\ &= 2^2 - 20\mathbf{i} + (5\mathbf{i})^2 \\ &= \boxed{-21 - 20\mathbf{i}} \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} z &= (1+\mathbf{i})(2-3\mathbf{i})(1+\mathbf{i}) \\ &= (1+\mathbf{i})^2(2-3\mathbf{i}) \\ &= 2\mathbf{i}(2-3\mathbf{i}) \\ &= 4\mathbf{i} - 6\mathbf{i}^2 \\ &= \boxed{6 + 4\mathbf{i}} \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} z &= (1-2\mathbf{i})^2(2+\mathbf{i}) \\ &= \left(1 - 4\mathbf{i} + (2\mathbf{i})^2\right)(2+\mathbf{i}) \\ &= (1 - 4\mathbf{i} - 4)(2+\mathbf{i}) \\ &= (-3 - 4\mathbf{i})(2+\mathbf{i}) \\ &= -6 - 3\mathbf{i} - 8\mathbf{i} - 4\mathbf{i}^2 \\ &= \boxed{-2 - 11\mathbf{i}} \end{aligned}$$

Exercice 4. Écrire sous forme algébrique les complexes suivants :

1.

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{1-\mathbf{i}} \\ &= \frac{(1+\mathbf{i})}{(1-\mathbf{i})(1+\mathbf{i})} \\ &= \frac{1+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}^2} \\ &= \frac{1+\mathbf{i}}{2} \\ &= \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i}} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{\sqrt{3}\mathbf{i} + 2} \\ &= \frac{1}{2 + \sqrt{3}\mathbf{i}} \\ &= \frac{2 - \sqrt{3}\mathbf{i}}{\left(2+\sqrt{3}\mathbf{i}\right)\left(2-\sqrt{3}\mathbf{i}\right)} \\ &= \frac{2-\sqrt{3}\mathbf{i}}{2^2 + \sqrt{3}^2} \\ &= \boxed{\frac{2}{7} - \frac{\sqrt{3}}{7}\mathbf{i}} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{4-3\mathbf{i}} \\ &= \frac{4+3\mathbf{i}}{(4-3\mathbf{i})(4+3\mathbf{i})} \\ &= \frac{4+3\mathbf{i}}{4^2+3^2} \\ &= \boxed{\frac{4}{13}+\frac{3}{13}\mathbf{i}} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} z &= \frac{4-6\mathbf{i}}{3+2\mathbf{i}} \\ &= \frac{(4-6\mathbf{i})(3-2\mathbf{i})}{(3+2\mathbf{i})(3-2\mathbf{i})} \\ &= \frac{-26\mathbf{i}}{3^2+2^2} \\ &= \boxed{-2\mathbf{i}} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} z &= \frac{5+15\mathbf{i}}{\mathbf{i}} \\ &= \frac{(5+15\mathbf{i})\times(-\mathbf{i})}{\mathbf{i}\times(-\mathbf{i})} \\ &= \boxed{15-5\mathbf{i}} \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} z &= \frac{1+2\mathbf{i}}{1-2\mathbf{i}} \\ &= \frac{(1+2\mathbf{i})^2}{(1-2\mathbf{i})(1+2\mathbf{i})} \\ &= \frac{1+4\mathbf{i}+(2\mathbf{i})^2}{1^2+2^2} \\ &= \boxed{-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\mathbf{i}} \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} z &= \left(\frac{1-\mathbf{i}}{2-3\mathbf{i}}\right)\left(\frac{3+\mathbf{i}}{\mathbf{i}}\right) \\ &= \boxed{\frac{8}{13}-\frac{14}{13}\mathbf{i}} \end{aligned}$$

Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Exercice 5. *Résolution d'équations du premier degré dans* $\mathbb{C}$.

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On donnera les solutions sous forme algébrique.

1. $(1+\mathbf{i})\,z = 3-\mathbf{i}$

$$\begin{aligned} (1+\mathbf{i})\,z = 3-\mathbf{i} &\iff z = \frac{3-\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}} \\ &\iff z = \frac{(3-\mathbf{i})(1-\mathbf{i})}{(1+\mathbf{i})(1-\mathbf{i})} \\ &\iff z = 1-2\mathbf{i} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \{1-2\mathbf{i}\}}$$

2. $2z+1-\mathbf{i} = \mathbf{i}z+2$

$$\begin{aligned} 2z+1-\mathbf{i} = \mathbf{i}z+2 &\iff 2z-\mathbf{i}z = 1+\mathbf{i} \\ &\iff (2-\mathbf{i})z = 1+\mathbf{i} \\ &\iff z = \frac{1+\mathbf{i}}{2-\mathbf{i}} \\ &\iff z = \frac{(1+\mathbf{i})(2+\mathbf{i})}{(2-\mathbf{i})(2+\mathbf{i})} \\ &\iff z = \frac{1}{5}+\frac{3}{5}\mathbf{i} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\mathbf{i}\right\}}$$

3. $(2z+1-\mathbf{i})(\mathbf{i}z+3)=0$

$$\begin{aligned}(2z+1-\mathbf{i})(\mathbf{i}z+3)=0 &\iff 2z+1-\mathbf{i}=0 \text{ ou } \mathbf{i}z+3=0\\ &\iff z=\frac{-1+\mathbf{i}}{2} \text{ ou } z=\frac{-3}{\mathbf{i}}\\ &\iff z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathbf{i} \text{ ou } z=3\mathbf{i}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathbf{i},3\mathbf{i}\right\}}$$

4. $\dfrac{z+1}{z-1}=2\mathbf{i}$
Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$

$$\begin{aligned}\frac{z+1}{z-1}=2\mathbf{i} &\iff z+1=2\mathbf{i}(z-1)\\ &\iff z-2\mathbf{i}z=-1-2\mathbf{i}\\ &\iff (1-2\mathbf{i})z=-1-2\mathbf{i}\\ &\iff z=\frac{-1-2\mathbf{i}}{1-2\mathbf{i}}\\ &\iff z=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\mathbf{i}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\mathbf{i}\right\}}$$

5. $(\mathbf{i}z+1)(z+3\mathbf{i})(z-1+4\mathbf{i})=0$

$$\begin{aligned}(\mathbf{i}z+1)(z+3\mathbf{i})(z-1+4\mathbf{i})=0 &\iff \mathbf{i}z+1=0 \text{ ou } z+3\mathbf{i}=0 \text{ ou } z-1+4\mathbf{i}=0\\ &\iff z=-\frac{1}{\mathbf{i}} \text{ ou } z=-3\mathbf{i} \text{ ou } z=1-4\mathbf{i}\\ &\iff z=\mathbf{i} \text{ ou } z=-3\mathbf{i} \text{ ou } z=1-4\mathbf{i}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}=\{\mathbf{i},-3\mathbf{i},1-4\mathbf{i}\}}$$

Cours :

Soient a,b,c trois réels tels que $a\neq 0$. On considère l'équation

$$az^2+bz+c=0$$

d'inconnue $z\in\mathbb{C}$. On note $\Delta=b^2-4ac$ son discriminant.

— Si $\Delta>0$, alors l'équation admet deux solutions réelles

$$z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

— Si $\Delta=0$, alors l'équation admet une solution réelle double :

$$z_0=-\frac{b}{2a}.$$

— Si $\Delta<0$, alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1=\frac{-b-\mathbf{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-b+\mathbf{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Factorisation :

— Si $\Delta\neq 0$, alors
$$az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2).$$

— Si $\Delta=0$, alors
$$az^2+bz+c=a(z-z_0)^2$$

Relations coefficients/racines :

$$z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont les solutions de l'équation } z^2-sz+p=0$$
$$\text{si et seulement si } \begin{cases} z_1+z_2=s\\ z_1\times z_2=p\end{cases}.$$

Exercice 6. *Résolution d'équations du second degré dans* $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes :

1. $2z^2-6z+5=0$
Ici $a=2$, $b=-6$ et $c=5$.
$\Delta=b^2-4ac=-4$

Comme $\Delta < 0$, l'équation $2z^2 - 6z + 5 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{|\Delta|}\mathbf{i}}{2a} = \frac{6 - \sqrt{4}\mathbf{i}}{4} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{i}$$

et

$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{|\Delta|}\mathbf{i}}{2a} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i}$$

Conclusion : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{i}, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i}\right\}}$

2. $z^2 - 5z + 9 = 0$
   $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}\mathbf{i}, \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}\mathbf{i}\right\}}$
3. $z^2 - 2z + 3 = 0$
   $\boxed{\mathscr{S} = \left\{1 - \sqrt{2}\mathbf{i}, 1 + \sqrt{2}\mathbf{i}\right\}}$
4. $z^2 = z + 1 \iff z^2 - z - 1 = 0$
   $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right\}}$
5. $z^2 + 3 = 0$
   $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\sqrt{3}\mathbf{i}, \sqrt{3}\mathbf{i}\right\}}$
6. $z^2 - 2\left(1 + \sqrt{2}\right)z + 2\left(\sqrt{2} + 2\right) = 0$
   Ici $a = 1$, $b = -2(1 + \sqrt{2})$, $c = 2(\sqrt{2} + 2)$ et $\Delta = \left(2(1 + \sqrt{2})\right)^2 - 4 \times 1 \times 2\left(\sqrt{2} + 2\right) = -4$
   $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\sqrt{2} + 1 + \mathbf{i}, \sqrt{2} + 1 - \mathbf{i}\right\}}$

Exercice 7. *Changement de variables / Recherche d'une solution évidente et division euclidienne*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$

Poser $Z = z^2$

$$\begin{aligned} z^4 + 3z^2 + 2 = 0 &\iff Z^2 + 3Z + 2 = 0 \\ &\iff Z = -2 \text{ ou } Z = -1 \\ &\iff z^2 = -2 \text{ ou } z^2 = -1 \\ &\iff z^2 + 2 = 0 \text{ ou } z^2 + 1 = 0 \\ &\iff z = -\sqrt{2}\mathbf{i} \text{ ou } z = \sqrt{2}\mathbf{i} \text{ ou } z = -\mathbf{i} \text{ ou } z = \mathbf{i} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\pm\sqrt{2}\mathbf{i}, \pm\mathbf{i}\right\}}$

2. $z^4 - 32z^2 - 144 = 0$
   Poser $Z = z^2$

$$\begin{aligned} z^4 - 32z^2 - 144 = 0 &\iff Z^2 - 32Z - 144 = 0 \\ &\iff Z = -4 \text{ ou } Z = 36 \\ &\iff z^2 = -4 \text{ ou } z^2 = 36 \\ &\iff z = \pm 2\mathbf{i} \text{ ou } z = \pm 6 \end{aligned}$$

$\boxed{\mathscr{S} = \{\pm 2\mathbf{i}, \pm 6\}}$

3. $z^3 - 6z^2 + 12z - 7 = 0$

$$\begin{aligned} z^3 - 6z^2 + 12z - 7 = 0 &\iff (z - 1)\left(z^2 - 5z + 7\right) = 0 \\ &\iff z - 1 = 0 \text{ ou } z^2 - 5z + 7 = 0 \\ &\iff z = 1 \text{ ou } z = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} \text{ ou } z = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathscr{S} = \left\{1, \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}\right\}}$

4. $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

$$\begin{aligned} z^3 + z^2 + z + 1 = 0 &\iff (z + 1)(z^2 + 1) = 0 \\ &\iff z + 1 = 0 \text{ ou } z^2 + 1 = 0 \\ &\iff z = -1 \text{ ou } z = -\mathbf{i} \text{ ou } z = \mathbf{i} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathscr{S} = \{-1, -\mathbf{i}, \mathbf{i}\}}$

Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Exercice 8. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

Réponses seulement, mais la démarche n'est pas rappelée (se référer au cours pour le détail ou à l'exercice 2 corrigé en TD)

1. $z = 2 + 2\mathbf{i}\sqrt{3} = \boxed{4e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}}$
2. $z = -\sqrt{2} + \mathbf{i}\sqrt{2} = \boxed{2e^{\mathbf{i}\frac{3\pi}{4}}}$
3. $z = 4 - 4\mathbf{i} = \boxed{4\sqrt{2}e^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}}$
4. $z = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{\mathbf{i}\sqrt{3}}{4} = \boxed{\dfrac{1}{2}e^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{3}}}$
5. $z = -2\mathbf{i} = \boxed{2e^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{2}}}$
6. $z = \dfrac{4}{1-\mathbf{i}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}e^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}} = \boxed{2\sqrt{2}e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}}$

Exercice 9. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $z = (1-\mathbf{i})^6 = \left(\sqrt{2}e^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}\right)^6 = \sqrt{2}^6 e^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{4}\times 6} = \boxed{8e^{-\mathbf{i}\frac{3\pi}{2}}}$
2. $z = \dfrac{1-\mathbf{i}\sqrt{3}}{1+\mathbf{i}} = \dfrac{2e^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}}e^{\mathbf{i}\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \boxed{\sqrt{2}e^{-\mathbf{i}\frac{7\pi}{12}}}$
3. $z = \dfrac{\left(\sqrt{3}+\mathbf{i}\right)^9}{(1+\mathbf{i})^{12}} = \dfrac{\left(2e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}\right)^9}{\left(\sqrt{2}e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{12}} = \dfrac{2^9 e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{6}\times 9}}{\sqrt{2}^{12}e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}\times 12}} = \dfrac{2^9}{2^6}e^{\mathbf{i}\left(\frac{3\pi}{2}-3\pi\right)} = 2^3 e^{-\mathbf{i}\frac{3\pi}{2}} = \boxed{8e^{-\mathbf{i}\frac{3\pi}{2}}}$
4. $z = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{5} + \mathbf{i}\sin\dfrac{\pi}{5}\right) = \boxed{3e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{5}}}$
5. $z = 2\left(\sin\dfrac{\pi}{6} + \mathbf{i}\cos\dfrac{\pi}{6}\right) = 2\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boxed{2e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}}$
6. $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{5} - \mathbf{i}\sin\dfrac{\pi}{5}\right) = 2\overline{\left(\cos\dfrac{\pi}{5} + \mathbf{i}\sin\dfrac{\pi}{5}\right)} = 2\overline{e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{5}}} = \boxed{2e^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{5}}}$

Exercice 10. Écrire sous forme algébrique les complexes suivants :

1. $z = 2e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathbf{i}}$
2. $z = \left(\sqrt{8}e^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}\right)\left(\sqrt{2}e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}\right) = \sqrt{8}\times\sqrt{2}e^{\mathbf{i}\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)} = 4e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{6}} = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathbf{i}\right) = \boxed{2\sqrt{3}+2\mathbf{i}}$
3. $z = \dfrac{6}{e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}} = 6e^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{3}} = 6\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}\right) = \boxed{3-3\sqrt{3}\mathbf{i}}$
4. $z = 3\mathbf{i}e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}} = 3e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}}e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}} = 3e^{\mathbf{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = 3e^{\mathbf{i}\frac{5\pi}{6}} = 3\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathbf{i}\right) = \boxed{\dfrac{-3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}\mathbf{i}}$

Divers

Exercice 11. Soit z un complexe différent de 2. On pose $z' = \dfrac{\mathbf{i}z}{z-2}$. Montrer que

z' est un imaginaire pur si et seulement si z est réel.

On note $x = \text{Re}(z)$ et $y = \text{Im}(z)$. Ainsi $z = x + \mathbf{i}y$.

$$\begin{aligned}
z' &= \frac{\mathbf{i}z}{z-2} \\
&= \frac{\mathbf{i}(x+\mathbf{i}y)}{(x+\mathbf{i}y)-2} \\
&= \frac{-y+\mathbf{i}x}{(x-2)+\mathbf{i}y} \\
&= \frac{(-y+\mathbf{i}x)\left((x-2)-\mathbf{i}y\right)}{\left((x-2)+\mathbf{i}y\right)\left((x-2)-\mathbf{i}y\right)} \\
&= \frac{-y(x-2)+xy+\mathbf{i}\left(x(x-2)+y^2\right)}{(x-2)^2+y^2} \\
&= \frac{2y+\mathbf{i}\left(x^2-2x+y^2\right)}{(x-2)^2+y^2} \\
&= \frac{2y}{(x-2)^2+y^2} + \mathbf{i}\frac{x^2-2x+y^2}{(x-2)^2+y^2}
\end{aligned}$$

Ainsi $\text{Re}(z') = \dfrac{2y}{(x-2)^2+y^2}$ et $\text{Im}(z') = \dfrac{x^2-2x+y^2}{(x-2)^2+y^2}$.

Enfin :

$$\begin{aligned}
z' \text{ est un imaginaire pur} &\iff \mathrm{Re}(z') = 0 \\
&\iff \frac{2y}{(x-2)^2 + y^2} = 0 \\
&\iff 2y = 0 \\
&\iff y = 0 \\
&\iff z = x + \mathbf{i}0 \\
&\iff z \text{ est un réel.}
\end{aligned}$$

Exercice 12. *Relations coefficients/racines*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant

$$\begin{cases} z_1 \times z_2 = 5 \\ z_1 + z_2 = 2 \end{cases}$$

d'inconnue (z_1, z_2).

z_1 et z_2 sont les solutions du système $\begin{cases} z_1 \times z_2 = 5 \\ z_1 + z_2 = 2 \end{cases}$ si et seulement si z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$ (relations coefficients/racines).

Ce système admet deux solutions :

$$z_1 = 1 - 2\mathbf{i} \text{ et } z_2 = 1 + 2\mathbf{i}$$

ou

$$z_1 = 1 + 2\mathbf{i} \text{ et } z_2 = 1 - 2\mathbf{i}.$$