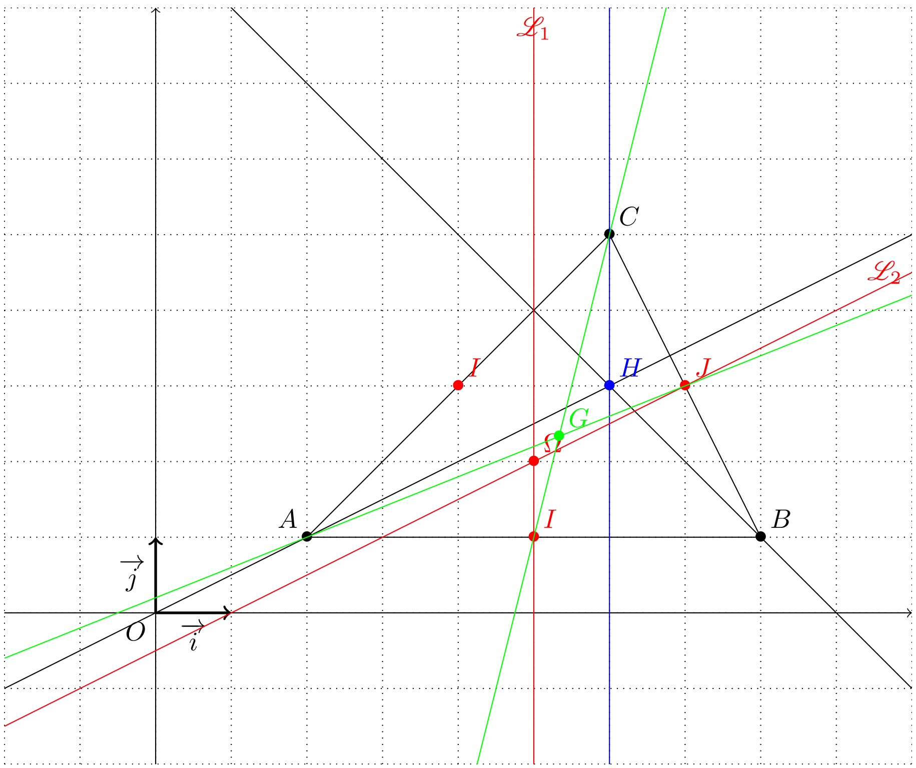
Devoir à la maison n°1 – Correction

Droites remarquables du triangle

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé. On considère le triangle suivant :



Hauteurs du triangle ABC

L'objectif de cette partie est de montrer que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes en un point H.

1. Quelles sont les coordonnées des points A, B et C dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$?
   $A(2,1)$ $B(8,1)$ $C(6,5)$.
2. On considère la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $x-2y=0$.
   (a) Vérifier que le point A appartient à la droite $\mathscr{D}_1$.
   $x_A - 2y_A = 2-2\times 0 = 0$ donc $A\in\mathscr{D}_1$.
   (b) Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à $\mathscr{D}_1$, que l'on note $\vec{n}_1$.
   $\vec{n_1}(1,-2)$.
   (c) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$.
   $\overrightarrow{BC}(x_C-x_B, y_C-y_B)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{BC}(-2,4)$.
   (d) Calculer $\left[\overrightarrow{BC},\vec{n_1}\right]$.
   $$\left[\overrightarrow{BC},\vec{n_1}\right] = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$
   (e) En déduire que la droite $\mathscr{D}_1$ est la hauteur issue du sommet A.
   Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{n_1}$ sont colinéaires (car $\left[\overrightarrow{BC},\vec{n_1}\right]=0$). Les droites (BC) et $\mathscr{D}_1$ sont donc perpendiculaires. De plus $A\in\mathscr{D}_1$. On en déduit la droite $\mathscr{D}_1$ est la hauteur issue du sommet A.
3. On note $\mathscr{D}_2$ la hauteur issue de B.
   (a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
   $\overrightarrow{AC}(4,4)$.

(b) En déduire une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}_2$.

Une équation cartésienne de $\mathscr{D}_2$ est $4x+4y+c=0$ avec c à déterminer. $B \in \mathscr{D}_2$ donc $c = -4x_B - 4y_B$. Une équation cartésienne de $\mathscr{D}_2$ est $x + y - 9 = 0$.

4. Intersection des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

(a) Montrer que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes.

On note $\overrightarrow{n_2}(1,1)$. Il s'agit un vecteur normal à $\mathscr{D}_2$. On vérifie que $[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}] \neq 0$. On en déduit que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes.

(b) On note $H(x_H, y_H)$ le point d'intersection des deux hauteurs $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. Déterminer les coordonnées de H.

$$H \in \mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2 \iff \begin{cases} x_H - 2y_H = 0 \\ x_H + y_H = 9 \end{cases} \iff x_H = 6 \text{ et } y_H = 3.$$

Conclusion : $H(6,3)$.

5. On note $\mathscr{D}_3$ la hauteur issue de C.

(a) Tracer $\mathscr{D}_3$ sur la figure (annexe).

(b) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}_3$.

$\overrightarrow{n_3} = \overrightarrow{AB}(6,0)$. Une équation cartésienne de $\mathscr{D}_3$ est $6x + 0y + c = 0$ avec c à déterminer. $C \in \mathscr{D}_3$ donc $c = -6x_C$. On en déduit qu'une équation cartésienne de $\mathscr{D}_3$ est $x - 6 = 0$.

(c) Vérifier que le point H appartient aussi à la droite $\mathscr{D}_3$.

On a bien $x_H - 6 = 0$, donc $H \in \mathscr{D}_3$.

(d) Conclure.

On a $H \in \mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2 \cap \mathscr{D}_3$. Les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$ sont donc concourantes en H, ie les hauteurs du triangle ABC sont concourantes en un point H.

Centre du cercle cirsconscrit au triangle ABC

On admet que les médiatrices d'un triangle sont concourantes. L'objectif de cette partie est de déterminer les coordonnées de Ω, centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

On note I, J, K les milieux des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.

6. Placer les points I, J et K sur la figure (annexe) et déterminer leurs coordonnées par le calcul.

$x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}$ donc $I(5,1)$. De manière similaire, on trouve $J(7,3)$ et $K(4,3)$.

7. On note $\mathscr{L}_1$ la médiatrice du segment $[AB]$. Tracer la droite $\mathscr{L}_1$ sur la figure (annexe) et déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{L}_1$.

$\overrightarrow{AB}(6,0)$ est un vecteur normal à $\mathscr{L}_1$ et $I \in \mathscr{L}_1$. On en déduit qu'une équation cartésienne de $\mathscr{L}_1$ est $x - 5 = 0$.

8. On note $\mathscr{L}_2$ la médiatrice du segment $[BC]$. Tracer la droite $\mathscr{L}_2$ sur la figure (annexe) et déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{L}_2$.

$\overrightarrow{BC}(-2,4)$ est un vecteur normal à $\mathscr{L}_2$ et $J \in \mathscr{L}_2$. On en déduit qu'une équation cartésienne de $\mathscr{L}_2$ est $x - 2y - 1 = 0$.

9. On note Ω le point d'intersection des droites $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$. Déterminer les coordonnées de Ω.

On note (x,y) les coordonnées de Ω.

$$\Omega \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 \iff \begin{cases} x - 5 = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases} \iff x = 5 \text{ et } y = 2.$$

Conclusion : $\Omega(5,2)$.

Centre de gravité et alignement

On admet que les médianes d'un triangle sont concourantes. L'objectif de cette partie est de déterminer les coordonnées de G, centre de gravité du triangle ABC.

On admet que les médianes d'un triangle sont concourantes. L'objectif de cette partie est de déterminer les coordonnées de G, centre de gravité du triangle ABC.

10. Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs. Calculer $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n}$. Que peut-on en déduire ?

    $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n}=0$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux.

11. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AJ).

    $\overrightarrow{AJ}(5,2)$ donc $\overrightarrow{n}_{(AJ)}\ (-2,5)$ est un vecteur normal à (AJ). Une équation de (AJ) est $-2x+5y+c=0$ avec c à déterminer en injectant les coordonnées de A.

    Conclusion : Une équation cartésienne de (AJ) est $-2x+5y-1=0$.

12. Déterminer une équation cartésienne de la droite (CI).

    $\overrightarrow{CI}(-1,-4)$ donc $\overrightarrow{n}_{CI}\ (4,-1)$ est un vecteur normal à (CI). Une équation de (CI) est $4x-y+c=0$ avec c à déterminer en injectant les coordonnées de C.

    Conclusion : Une équation cartésienne de (CI) est $4x-y-19=0$.

13. Déterminer les coordonnées du point G, centre de gravité du triangle ABC.

    On note (x,y) les coordonnées de G.

    $$G\in(AJ)\cap(CI) \iff \begin{cases} -2x+5y-1=0 \\ 4x-y-19=0 \end{cases} \iff x=\frac{16}{3} \text{ et } y=\frac{7}{3}.$$

    Conclusion : $G\left(\dfrac{16}{3},\dfrac{7}{3}\right)$.

14. Montrer que les points H, Ω et G sont alignés.

    $\left[\overrightarrow{H\Omega},\overrightarrow{HG}\right]=\begin{vmatrix} 5-6 & \frac{16}{3}-6 \\ 2-3 & \frac{7}{3}-3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & -\frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix}=0$ donc les points H, Ω et G sont alignés.