Séance
Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 1. À l'aide d'un cercle trigonométrique, déterminer :

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \arcsin\left(\frac{1}{2}\right), \quad \arctan(-1), \quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Exercice 2. 1. Montrer que

$$0 < \arccos\left(\frac{3}{4}\right) < \frac{\pi}{4}.$$

2. Résoudre

$$\arccos(x) = 2\arccos\left(\frac{3}{4}\right).$$

Exercice 3. 1. Montrer que $2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$\sin(2t) = \frac{2\tan(t)}{1+\tan^2(t)}.$$

3. En déduire que

$$\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right).$$

Exercice 4. 1. Montrer que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\sin(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}} \quad \text{et} \quad \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}.$$

2. Montrer que : $\arctan\left(\frac{3}{4}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ et $\arctan\left(\frac{5}{12}\right) \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.

Ainsi $0 < \arctan\left(\frac{3}{4}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right) < \frac{\pi}{2}$.

3. Résoudre $\arcsin(x) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right)$.

Indication : On rappelle que $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.