Devoir à la maison n°3

Dénombrement et récurrences

Exercice 1. Dénombrement

Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. Combien y a-t-il de codes pairs ?
3. Combien y a-t-il de codes ne contenant aucun chiffre 4 ?
4. Combien y a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4 ?

Dans cette question on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.

5. Combien y a-t-il de codes possibles ?
6. Combien y a-t-il de codes impairs ?
7. Combien y a-t-il de codes contenant le chiffre 6 ?

On considère à présent une urne contenant 9 boules numérotées de 1 à 9.

8. On en tire simultanément 3. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
9. Soit k un entier vérifiant $3 \leqslant k \leqslant 9$. Combien y a-t-il de tirages de 3 boules dont le plus grand numéro est k ?
10. En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{k=3}^{9} \binom{k-1}{2}$ sous forme d'un unique coefficient binomial.

Exercice 2. Raisonnement par récurrence

On considère la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}.$$

11. Calculer les cinq premiers termes des suites $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
12. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, F_n est un entier naturel non nul.
13. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{F_n}{F_{n+1}}$.

On pose $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

14. Montrer que $\alpha^2 = \alpha + 1$ et $\beta^2 = \beta + 1$.
15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n - \beta^n\right)$.
16. En déduire une expression de u_n en fonction de α, β et n.
17. Montrer que $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right| < 1$.
18. En déduire la limite de la suite (u_n).

19. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} F_{3n} \text{ est pair} \\ F_{3n+1} \text{ et } F_{3n+2} \text{ sont impairs} \end{cases}.$$

20. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+4} = 3F_{n+1} + 2F_n$.

21. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_{4n} est un multiple de 3.