

DM n°3

Équations différentielles

On considère les équations différentielles suivantes :

$$xy' - (x + 1)y = 0 \quad (E_1)$$

et

$$xy'' - (5x + 1)y' + (6x + 2)y = 0 \quad (E_2)$$

sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

1. Déterminer a et b des réels tels que pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$\frac{x + 1}{x} = a + \frac{b}{x}.$$

2. Résoudre (E_1) sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
3. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on pose $\varphi(x) = e^{2x}$.
Montrer que φ est une solution de (E_2) sur $]0; +\infty[$.
4. Soit $\mathbf{u}(x)$ une fonction deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$.
On pose, pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$\mathbf{v}(x) = \mathbf{u}(x)e^{2x}.$$

Montrer que $\mathbf{v}(x)$ est solution de (E_2) si et seulement si $\mathbf{u}'(x)$ est une solution de (E_1) .

5. Résoudre (E_2) sur l'intervalle $]0; +\infty[$.