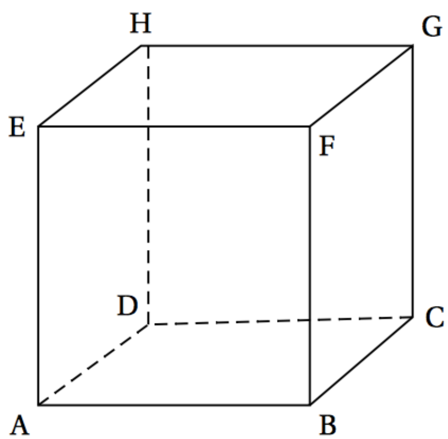
# Géométrie élémentaire de l'espace

## Exercices supplémentaires

**Exercice 1.** On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté 1 représenté ci-dessous :




Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal

$$\mathcal{R} = \left(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right).$$

1. On note $K$ le point de l'espace tel que $\overrightarrow{FK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FD}$.
   (a) Montrer que les coordonnées du point $K$ dans $\mathcal{R}$ sont $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.
   (b) Montrer que les droites $(EK)$ et $(DF)$ sont orthogonales.
   (c) Calculer la distance $EK$.
2. Soit $M$ un point du segment $[HG]$. On note $m = HM$ ($m$ est donc un réel appartenant à $[0; 1]$).
   (a) Montrer que, pour tout $m$ appartenant à l'intervalle $[0; 1]$, le volume du tétraèdre $EMFD$, en unité de volume, est égal à $\frac{1}{6}$.
   (b) Déterminer une équation cartésienne du plan $(MFD)$.
   (c) On note $d_m$ la distance du point $E$ au plan $(MFD)$. Montrer que pour tout $m \in [0; 1]$,
   $$d_m = \frac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}.$$
   (d) Déterminer la position de $M$ sur le segment $[HG]$ pour laquelle la distance $d_m$ est maximale.
   (e) En déduire que lorsque la distance $d_m$ est maximale, le point $K$ est le projeté orthogonal de $E$ sur le plan $(MFD)$.
3. On note $\mathscr{S}$ la sphère de centre $M$ et de rayon $r = \sqrt{2}$.
   (a) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{S}$.
   (b) On note $M'$ le projeté orthogonal du point $M$ sur le plan $(AFG)$. Déterminer les coordonnées du point $M'$.
   (c) Montrer que quel que soit $m \in [0; 1]$, $M'$ appartient à une droite dont on déterminera un système d'équations cartésiennes.
   (d) Déterminer l'intersection $(AFG) \cap \mathscr{S}$.
   (e) Déterminer l'intersection $(HG) \cap \mathscr{S}$.

**Exercice 2.** On munit $\mathscr{E}$ d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note $\mathcal{D}$ la droite passant par $O$ et dirigée par $\vec{u} = (1, 1, 1)$ et $\mathcal{Q}$ le plan d'équation : $y + z = 0$. On considère la famille de plans

$$\mathcal{P}_m : x + my - mz = 1,$$

où $m \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que quel que soit le réel $m$, la droite $\mathcal{D}$ n'est jamais perpendiculaire au plan $\mathcal{P}_m$.
2. Soit $m \in \mathbb{R}$ fixé. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{R}_m$ contenant $\mathcal{D}$ et perpendiculaire à $\mathcal{P}_m$.
3. Montrer que pour tout réel $m$, l'intersection des plans $\mathcal{P}_m$, $\mathcal{R}_m$ et $\mathcal{Q}$ est un point $I_m$ dont on déterminera les coordonnées dans $\mathcal{R}$.
4. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = x$. Montrer que $\mathcal{S}$ est une sphère dont on déterminera les coordonnées du centre, ainsi que son rayon.
5. (a) Montrer que l'intersection de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{Q}$ est un cercle $\mathcal{C}$ dont on déterminera le centre et le rayon.

   (b) Montrer que quel que soit le réel $m$, $I_m$ appartient à $\mathcal{C}$.