Devoir à la maison n°4

Suites réelles

À rendre lundi 24/02/2025

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}.$$

On définit $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+4}$ sur l'intervalle $[0, 1]$. On note $\mathscr{C}_f$ son graphe (unité graphique : 10 cm).

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
2. En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.
3. En utilisant $\mathscr{C}_f$ et la première bissectrice, placer les premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ *(récurrence - on pensera à utiliser la fonction f).*
5. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
6. Que peut-on en déduire ? Déterminer $\lim u_n$.

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}.$$

7. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et déterminer l'expression de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
8. En déduire l'expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
9. Retrouver le résultat de la question 6.

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{12} - x + 1$.

1. **a)** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Justifier que f est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$, calculer $f'(x)$ et déterminer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$. En déduire le tableau de variation de f.

2. **a)** Montrer que f s'annule exactement deux fois sur l'intervalle $[0, +\infty[$: une première fois sur l'intervalle $[0, 2]$ et une deuxième fois sur l'intervalle $]2, +\infty[$.

On notera β et γ les deux solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[0, +\infty[$ avec $\beta < \gamma$.

b) Simplifier l'expression $1 + \dfrac{\beta^3}{12}$ (on l'exprimera à l'aide de β).

c) À l'aide de la calculatrice, montrer que β appartient à $\left]1\,;\,1{,}2\right[$ et que γ appartient à $\left]2{,}7\,;\,2{,}8\right[$.

d) Préciser le signe de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[0, +\infty[$.

4. On cherche à obtenir une approximation de β. À cet effet, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n^3}{12}. \end{cases}$$

a) Calculer u_1 puis démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à l'intervalle $[0, \beta]$.

b) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = f(u_n)$.

Que peut-on en déduire sur la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers β.

d) Écrire dans le langage de votre choix (MAPLE, MATHEMATICA ou autre) un programme de quelques lignes permettant d'obtenir pour un entier N donné la valeur de u_N.