DM5 : Suites récurrentes

À rendre avant le lundi 18/03/2024

CALCULATRICE AUTORISÉE

Il sera tenu compte dans la notation de la copie :

1. **De la qualité de la rédaction** :
   justification des affirmations, introduction des variables utilisées, utilisation à bon escient des symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $=$ ...
2. **De la présentation** :
   résultats encadrés, calculs bien présentés, écriture aérée et lisible...

CONSIGNES :

1. Faire le DM5 sur feuille, comme vous le rédigeriez en DS, sans inscrire son nom et son prénom (votre copie doit rester anonyme).
2. Télécharger une application du type Genius Scan sur votre téléphone.
3. Scanner votre production et l'exporter au format pdf (attention à ne générer qu'un pdf seulement).
4. Renommer ce pdf NOM_DM5.pdf :
   Au hasard, Yacouba nommera son fichier MAGASSA_DM5.pdf (respecter ce formalisme).
5. Déposer ce pdf via moodle sur monbureaunumerique avant lundi 18/03/2024.
   .

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^3}{12}-x+1$.

1. **a)** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Justifier que f est dérivable sur l'intervalle $[0,+\infty[$, calculer $f'(x)$ et déterminer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$. En déduire le tableau de variation de f.

2. **a)** Montrer que f s'annule exactement deux fois sur l'intervalle $[0,+\infty[$: une première fois sur l'intervalle $[0,2]$ et une deuxième fois sur l'intervalle $]2,+\infty[$.

On notera β et γ les deux solutions de l'équation $f(x)=0$ sur $[0,+\infty[$ avec $\beta<\gamma$.

b) Simplifier l'expression $1+\dfrac{\beta^3}{12}$ (on l'exprimera à l'aide de β).

c) À l'aide de la calculatrice, montrer que β appartient à $\left]1\,;\,1{,}2\right[$ et que γ appartient à $\left]2{,}7\,;\,2{,}8\right[$.

d) Préciser le signe de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[0,+\infty[$.

4. On cherche à obtenir une approximation de β. À cet effet, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0=1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=1+\dfrac{u_n^3}{12}. \end{cases}$$

a) Calculer u_1 puis démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à l'intervalle $[0,\beta]$.

b) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n=f(u_n)$.

Que peut-on en déduire sur la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers β.

d) Écrire dans le langage de votre choix (Python ou autre) un programme de quelques lignes permettant d'obtenir pour un entier N donné la valeur de u_N.