Lycée Louis Vincent
TSI1 - 2023/2024

Devoir maison n°5 – Correction

Mathématiques

Question 1a :

Par comparaison, on a

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

Question 1b :

f est une fonction polynomiale dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

Pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x^2}{4} - 1$.

Soit $x \in [0,+\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff x^2 - 4 = 0 \\ &\iff x = -2 \text{ ou } x = 2 \\ &\iff x = 2 && \text{car } x \in [0,+\infty[\end{aligned}$$

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Question 2a :

Application du théorème de la bijection :

f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0,2]$, donc f réalise une bijection de l'intervalle $[0,2]$ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{3}, 1\right]$ (qui contient 0). Il existe donc une unique $\beta \in [0,2]$ tel que $f(\beta) = 0$.

De même, f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]2,+\infty[$, f réalise une bijection de l'intervalle $]2,+\infty[$ sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$ (qui contient 0). Il existe donc un unique $\gamma \in]2,+\infty[$ tel que $f(\gamma) = 0$.

Conclusion : f s'annule exactement deux fois : une première fois en β qui appartient à l'intervalle $[0,2]$ et une deuxième fois en γ qui appartient à l'intervalle $]2,+\infty[$.

Question 2b :

On sait que $f(\beta) = 0$, donc $\dfrac{\beta^3}{12} - \beta + 1 = 0$ et donc $\boxed{1 + \dfrac{\beta^3}{12} = \beta}$.

Question 2c :

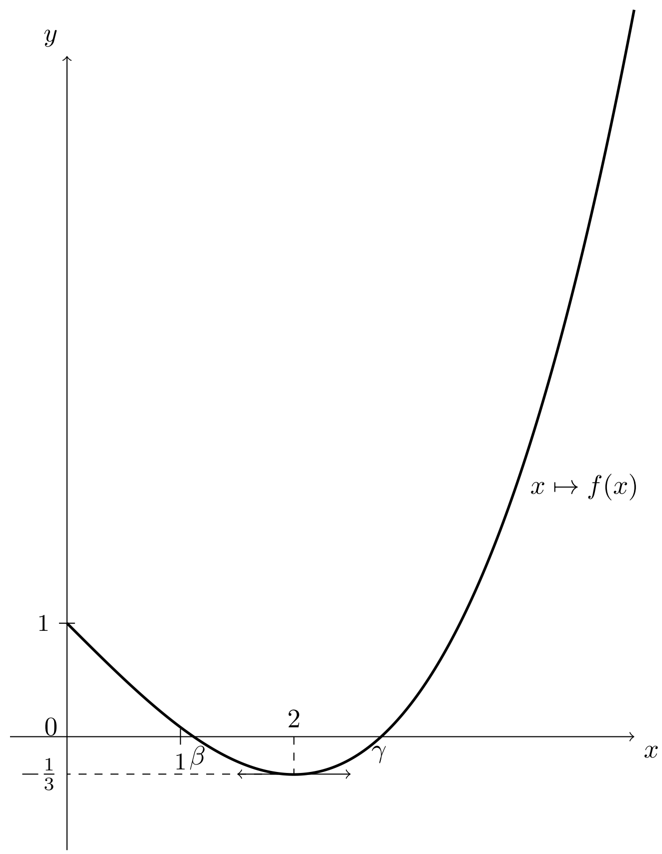
$f(1) = 0,08 > 0$ et $f(1,2) \simeq -0,06 < 0$ donc $\boxed{\beta \in]1;1,2[}$.

De même, $f(2,7) \simeq -0,06 < 0$ et $f(2,8) \simeq 0,03 > 0$ donc $\boxed{\gamma \in]2,7;2,8[}$.

Question 2d :

x	0		β		γ		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Question 3 :



Question 4a :

$$\boxed{u_1 = 1 + \frac{u_0^3}{12} = \frac{13}{12}}$$

Récurrence : On pose $\mathcal{H}_n : u_n \in [0, \beta]$.

$u_0 = 1$ donc $u_0 \in [0, \beta]$ d'après la question 2*c*. $\mathcal{H}_0$ est donc vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{H}_n$ vraie.

$$\begin{aligned}
0 \leqslant u_n \leqslant \beta &\Longrightarrow 0 \leqslant u_n^3 \leqslant \beta^3 && \text{(car la fonction x}\mapsto x^3 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}) \\
&\Longrightarrow 0 \leqslant \frac{u_n^3}{12} \leqslant \frac{\beta^3}{12} \\
&\Longrightarrow 1 \leqslant 1 + \frac{u_n^3}{12} \leqslant 1 + \frac{\beta^3}{12} \\
&\Longrightarrow 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \beta && \text{(dparès le résultat de la question 2b)}
\end{aligned}$$

Ainsi $u_{n+1} \in [1, \beta]$, or $[1, \beta] \subset [0, \beta]$, donc $u_{n+1} \in [0, \beta]$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0, \beta]}$

Question 4b :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 1 + \dfrac{u_n^3}{12} - u_n$ et $f(u_n) = \dfrac{u_n^3}{12} - u_n + 1$, donc

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = f(u_n).}$$

or $u_n \in [0, \beta]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (d'après la question précédente) et f est positive sur l'intervalle $[0, \beta]$ (d'après la question 2d). Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) \geqslant 0$.

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$.

Question 4c :

On a montré que la suite (u_n) est croissante et majorée par β. La suite (u_n) est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone. On note $\ell = \lim u_n$.

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n^3}{12}$. Par passage à la limite, on a $\ell = 1 + \dfrac{\ell^3}{12}$, donc $\dfrac{\ell^3}{12} - \ell + 1 = 0$, c'est-à-dire $f(\ell) = 0$. Ainsi $\ell = \beta$ ou $\ell = \gamma$

(d'après 2a). De plus $u_n \in [0, \beta]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\ell \in [0, \beta]$ par passage à la limite. Finalement $\ell = \beta$.

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } \beta}$.

Question d :

```
def u(n):
    resu=1.0
    i=0
    if n==0:
        return resu
    else :
        while i<n :
            resu=float(resu**3)/12+1
            i+=1
        return resu

""" Alternative récursivité :

def u(n):
    if n==0:
        return 1
    else :
        return float(u(n-1)**3)/12+1

"""


N=int(input("Entrer la valeur de N : "))

print(u(N))
```