DM6 : Puissances d'une matrice

À rendre avant le lundi 25/03/2024

CALCULATRICE INTERDITE

Il sera tenu compte dans la notation de la copie :

1. **De la qualité de la rédaction** :
   justification des affirmations, introduction des variables utilisées, utilisation à bon escient des symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $=$ ...
2. **De la présentation** :
   résultats encadrés, calculs bien présentés, écriture aérée et lisible...

CONSIGNES :

1. Faire le DM6 sur feuille, comme vous le rédigeriez en DS, sans inscrire son nom et son prénom (votre copie doit rester anonyme).
2. Télécharger une application du type Genius Scan sur votre téléphone.
3. Scanner votre production et l'exporter au format pdf (attention à ne générer qu'un pdf seulement).
4. Renommer ce pdf NOM_DM6.pdf :
   Au hasard, Maël nommera son fichier VIGNOLI_DM6.pdf (respecter ce formalisme).
5. Déposer ce pdf via moodle sur monbureaunumerique avant lundi 25/03/2024.
   .

Problème : Différentes méthodes de calcul des puissances d'une matrice

Tout au long de ce problème, M désigne la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels définie par :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

et I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3, c'est-à-dire : $\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Une première méthode pour le calcul des puissances de M .

Considérons la matrice A définie par : $\mathrm{A} = \dfrac{1}{4}(\mathrm{M} - \mathrm{I}_3)$.

1.1 Calculer A puis A^2.

1.2 Exprimer la matrice M en fonction de la matrice A.

1.3 Montrer que pour tout entier n appartenant à $\{0, 1, 2\}$, il existe un réel u_n tel que : $\mathrm{M}^n = \mathrm{I}_3 + u_n\mathrm{A}$.

Nous rappelons que : $\mathrm{M}^0 = \mathrm{I}_3$.

1.4 Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, il existe un réel u_n tel que : $\mathrm{M}^n = \mathrm{I}_3 + u_n\mathrm{A}$.

La preuve mettra en avant la relation : $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} = -3\,u_n + 4$.

1.5 Considérons la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ v_n = u_n - 1$.

1.5.1 Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

1.5.2 En déduire pour tout entier naturel n, une expression de v_n en fonction de n.

1.5.3 En déduire alors, pour tout entier naturel n, une expression de u_n en fonction de n.

1.6 Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, en déduire une écriture matricielle de M^n ne faisant intervenir que l'entier n.

2. Une seconde méthode de calcul des puissances de M .

2.1 Montrer qu'il existe une unique matrice J appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\mathrm{M} = 4\mathrm{J} - 3\mathrm{I}_3$.

2.2 Calculer J^2, puis pour tout entier naturel non nul n , J^n .

2.3 Soit n un entier naturel non nul.

2.3.1 Énoncer la formule du binôme.

2.3.2 Montrer que : $\mathrm{M}^n = (-3)^n\mathrm{I}_3 + \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k(-3)^{n-k}\right)\mathrm{J}$.

2.3.3 Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} = 1 - (-3)^n$.

2.3.4 En déduire une expression de M^n en fonction de n , I_3 et J ,
puis une écriture matricielle de M^n ne faisant intervenir que l'entier n .

2.4 Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, en déduire une écriture matricielle de M^n ne faisant intervenir que l'entier n .