DM6 - Correction.

Données $M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $A = \frac{1}{4}(M - I_3)$.

1.1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -A$.

Conclusion : $\boxed{A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A^2 = -A}$

1.2. $A = \frac{1}{4}(M - I_3)$ donc $4A = M - I_3$

donc $\boxed{M = I_3 + 4A}$

1.3. $M^0 = I_3 = I_3 + u_0 A$ avec $u_0 = 0$.

$M^1 = I_3 + 4A = I_3 + u_1 A$ avec $u_1 = 4$

$M^2 = (I_3 + 4A)^2 = I_3 + 8A + 16A^2$ car $AI = IA$

$= I_3 + 8A - 16A$ car $A^2 = -A$

$= I_3 - 8A$

$= I_3 + u_2 A$ avec $u_2 = -8$.

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} M^0 = I_3 + u_0 A \text{ avec } u_0 = 0 \\ M^1 = I_3 + u_1 A \text{ avec } u_1 = 4 \\ M^2 = I_3 + u_2 A \text{ avec } u_2 = -8 \end{array}}$

1.4 H_n : " il existe $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $M^n = I_3 + u_n A$ "

H_0 est vraie : $M^0 = I_3 + u_0 A$ avec $u_0 = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n est vraie :

Il existe $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $M^n = I_3 + u_n A$

$M^{n+1} = M^n \times M$

$= (I_3 + u_n A)(I_3 + 4A)$ d'après H_n

$= I_3 + 4A + u_n A + 4u_n A^2$

$= I_3 + 4A + u_n A - 4u_n A$ car $A^2 = -A$

$= I_3 + (4 + u_n - 4u_n)A$

$= I_3 + (4 - 3u_n)A$

$= I_3 + u_{n+1} A$ avec $u_{n+1} = 4 - 3u_n$

Donc H_{n+1} est vraie.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \text{ il existe } u_n \in \mathbb{R} \text{ tq } M^n = I_3 + u_n A}$

Données : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 4 - 3u_n \end{cases}$ $v_n = u_n - 1$.

1.5.1 $v_{n+1} = u_{n+1} - 1$

$= 4 - 3u_n - 1$

$= 3 - 3u_n$

$= 3(1 - u_n)$

$= 3 \times (-v_n)$

$= -3v_n$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = -3v_n$

<u>La suite (v_n) est géométrique de raison $q = -3$</u>

(1.5.2) $v_0 = u_0 - 1 = -1$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 \times q^n = -1 \times (-3)^n$

Ccl : $\underline{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = (-1) \times (-3)^n}$

(1.5.3) On sait que $v_n = u_n - 1$

Donc $u_n = v_n + 1$

Conclusion : $\underline{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1) \times (-3)^n + 1}$.

(1.6)
$$M^n = I_3 + u_n A$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + u_n \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1-2u_n & 0 & -2u_n \\ u_n & 1 & u_n \\ u_n & 0 & 1+u_n \end{pmatrix}$$

Conclusion ; $\forall n \in \mathbb{N}$
$$M^n = \begin{pmatrix} 2(-3)^n - 1 & 0 & 2(-3)^n - 2 \\ 1-(-3)^n & 1 & 1-(-3)^n \\ 1-(-3)^n & 0 & 2-(-3)^n \end{pmatrix}$$

(2.1) $M = 4J - 3I_3 \iff 4J = M + 3I_3$

$\iff J = \frac{1}{4}(M + 3I_3)$

Ccl : Il existe une unique matrice J tq $M = 4J - 3I_3$:
$$J = \frac{1}{4}(M + 3I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(2.2) $J^2 = J \times J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J$

Ccl : $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad J^n = J}$.

(2.3.1) Soient $A, B \in M_3(\mathbb{R})$

$\underline{\text{Si } AB = BA, \text{ alors } (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}}$

(2.3.2) $M = 4J - 3I_3$

On a $(4J)(-3I_3) = -12J = (-3I_3)(4J)$

Donc
$$M^n = \left(4J + (-3I_3)\right)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (4J)^k (-3I_3)^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k J^k (-3)^{n-k} I_3^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} J^k$$
$$= \underbrace{\binom{n}{0} 4^0 (-3)^n J^0}_{(k=0)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k}}_{(1 \leqslant k \leqslant n)}$$
$$= (-3)^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} J$$

car $J^k = J$ pour $k \geqslant 1$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad M^n = (-3)^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} J}$

2.3.3. $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k(-3)^{n-k}=(4+(-3))^n=1^n=1$$

et $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k(-3)^{n-k}=\binom{n}{0}4^0(-3)^n+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^k(-3)^{n-k}$$
$$=(-3)^n+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^k(-3)^{n-k}$$

Donc $(-3)^n+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^k(-3)^{n-k}=1$

D'où $$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}4^k(-3)^{n-k}=1-(-3)^n \quad \forall n\in\mathbb{N}^*}$$

2.3.4 $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\quad M^n=(-3)^n I_3+(1-(-3)^n)J$

$$M^n=(-3)^n\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+(1-(-3)^n)\begin{pmatrix}-1&0&-2\\1&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}$$

$$M^n=\begin{pmatrix}2(-3)^n-1&0&2(-3)^n-2\\1-(-3)^n&1&1-(-3)^n\\1-(-3)^n&0&2-(-3)^n\end{pmatrix} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

2.4, Pour $n=0$:

$$\begin{pmatrix}2(-3)^n-1&0&2(-3)^n-2\\1-(-3)^n&1&1-(-3)^n\\1-(-3)^n&0&2-(-3)^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3=M^0$$

L'égalité est encore vérifiée en $n=0$.

Ccl : $\forall n\in\mathbb{N}$, $M^n=\begin{pmatrix}2(-3)^n-1&0&2(-3)^n-2\\1-(-3)^n&1&1-(-3)^n\\1-(-3)^n&0&2-(-3)^n\end{pmatrix}$
