Devoir à la maison n°6
Espaces vectoriels
À rendre le mardi 26 avril 2022

Exercice 1. On considère les quatre vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ et } v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) de $\mathbb{R}^4$ est-elle libre ou liée ?
2. Si elle est liée, déterminer les relations linéaires satisfaites par ces quatre vecteurs.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on note

$$P_0 = X^3, \quad P_1 = X^3 + X^2, \quad P_2 = X^3 + X^2 + X \quad \text{et} \quad P_3 = X^3 + X^2 + X + 1.$$

3. Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) constitue une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
4. Déterminer les coordonnées de la matrice $P = 2 + X - X^2 - X^3$ dans cette base. En déduire $\mathrm{Mat}_{(P_0,P_1,P_2,P_3)}(P)$.

Exercice 3. On considère la partie F de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \middle| \ a - c = 0 \text{ et } a - 3b + d = 0 \right\}.$$

5. Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
6. Déterminer une famille génératrice de F.
7. En déduire une base de F, ainsi que la dimension de F.

Soient

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On pose $G = \mathrm{Vect}(A_1, A_2, A_3)$.

8. La famille (A_1, A_2, A_3) est-elle libre ? Dans le cas contraire, déterminer une relation linéaire satisfaite par ces trois matrices.
9. En déduire une base de G, ainsi que sa dimension.
10. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?