DM7 - Correction.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -15 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$

1a. $B = A - I_3 = \begin{pmatrix} 3 & -15 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -10 & 4 \end{pmatrix}$

$$\boxed{B^2 = B \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

1b. $B^2 = 0$ donc $(A - I_3)^2 = 0$

donc $A^2 - 2AI_3 + I_3^2 = 0$

car $A \times (-I_3) = (-I_3)A$

donc $\boxed{A^2 - 2A + I_3 = 0}$.

2. $P(X) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$

$\boxed{1 \text{ est une racine double de } P(X)}$

3a. Il existe $Q_n(X)$ et $R_n(X)$ uniques appartenant à $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$X^n = P(X) Q_n(X) + R_n(X)$$

et $\deg(R_n(X)) < \deg(P(X))$.

b. $\deg(R_n(X)) < 2$ donc $R_n(X) = a_n X + b_n$ avec a_n, b_n des réels

Ainsi $\underline{X^n = (X-1)^2 Q_n(X) + a_n X + b}$. (1)

En dérivant cette relation, on obtient

$\underline{n X^{n-1} = 2(X-1) Q_n(X) + (X-1)^2 Q_n'(X) + a_n}$ (2)

En évaluant les relations (1) et (2) en 1, on obtient :

$$\begin{cases} 1 = 0 \times Q_n(1) + a_n + b_n \\ n = 2 \times 0 \times Q_n(1) + 0 \times Q_n'(1) + a_n \end{cases}$$

D'où $a_n = n$ et $b_n = 1 - n$.

Conclusion : $\boxed{R_n(X) = nX + (1-n)}$ (3)

4. On a montré que

$\underline{X^n = (X^2 - 2X + 1) Q_n(X) + nX + (1-n)}$

En évaluant cette relation en A, on obtient

$$A^n = (A^2 - 2A + I_3) Q_n(A) + nA + (1-n) I_3$$

or $A^2 - 2A + I_3 = 0$

donc $\underline{A^n = nA + (1-n) I_3}$

D'où $A^n = n\begin{pmatrix} 4 & -15 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -10 & 5 \end{pmatrix} + (1-n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 3n+1 & -15n & 3n \\ n & 1-5n & n \\ 2n & -10n & 4n+1 \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*}$$

5. Autre méthode : Binôme de Newton

$B = A - I_3$ et $B^2 = 0$

Donc $A = B + I_3$ or $B \times I_3 = I_3 \times B$

Donc
$$\begin{aligned} A^n &= (B+I_3)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I_3^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k \\ &= \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B^1 \quad \text{pour } n \geqslant 1 \\ &\qquad (\text{car } B^k = 0 \ \forall k \geqslant 2) \\ &= I_3 + nB \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 3 & -15 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -10 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+3n & -15n & 3n \\ n & 1-5n & n \\ 2n & -10n & 1+4n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion : $A^n = \begin{pmatrix} 1+3n & -15n & 3n \\ n & 1-5n & n \\ 2n & -10n & 4n+1 \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(la formule étant encore vérifiée en $n=0$)

Calculer $\int_a^b (x-a)^n (x-b)^n \, dx$.

$$\int_a^b (x-a)^n (x-b)^n \, dx$$

$$= \underbrace{\left[\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \times (x-b)^n \right]_a^b}_{0} - \int_a^b \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \times n (x-b)^{n-1} \, dx \quad \text{par IPP}$$

$$= -\frac{n}{n+1} \int_a^b (x-a)^{n+1} (x-b)^{n-1} \, dx$$

$$= -\frac{n}{n+1} \left(\underbrace{\left[\frac{(x-a)^{n+2}}{n+2} (x-b)^{n-1} \right]_a^b}_{0} - \int_a^b \frac{(x-a)^{n+2}}{n+2} \times (n-1)(x-b)^{n-2} \, dx \right) \quad \text{\# seconde IPP}$$

$$= (-1)^2 \frac{n \times (n-1)}{(n+1)(n+2)} \int_a^b (x-a)^{n+2} (x-b)^{n-2} \, dx$$

$$= \dots$$

$$= (-1)^n \frac{n \times (n-1) \times \dots \times 1}{(n+1)(n+2) \times \dots \times 2n} \int_a^b (x-a)^{2n} \, dx \quad \text{\# après } n \text{ IPP successives}$$

$$= (-1)^n \frac{n! \times n!}{n! \, (n+1)(n+2) \times \dots \times 2n} \left[\frac{(x-a)^{2n+1}}{2n+1} \right]_a^b$$

$$= (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{(b-a)^{2n+1}}{2n+1}.$$

$$\boxed{\text{Conclusion : pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } \int_a^b (x-a)^n (x-b)^n \, dx = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{(b-a)^{2n+1}}{2n+1}}$$