Devoir à la maison n°8
Sous-espaces vectoriels

Exercice 1. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la famille $\mathscr{F} = (A, B, C, D)$ est une famille libre.
2. En déduire que $\mathscr{F}$ constitue une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer les coordonnées de la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{F}$. En déduire $\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(M)$.

Exercice 2.

1. On considère la partie F de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x - z = 0 \text{ et } x - 3y + t = 0\right\}.$$

   (a) Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

   (b) Déterminer une base de F. En déduire la dimension de F.

2. Soient

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   On pose

$$G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3).$$

   (a) Déterminer le rang de la famille (v_1, v_2, v_3).

   (b) En déduire une base de G, ainsi que sa dimension.

   (c) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in G$. Déterminer une équation satisfaite par les coordonnées de X.

3. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils en somme directe ?

Exercice 3. Soient

$$F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f(1) = 0\}$$

et

$$G = \{x \mapsto ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Montrer que F et G sont en somme directe.
3. Soit $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = h(x) - (ax + b)$$

   vérifie $f \in F$.

4. En déduire que $F \oplus G = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.