DS1 - Eléments de correction.

Exercice 1.

1. $P(-1) = 2\times(-1)^3+5\times(-1)^2+(-1)-2$

$= -2+5-3$

$= 0$

donc -1 est bien une racine de $P(x)$.

2.

$$\begin{array}{rl|l} & 2x^3+5x^2+x-2 & x+1 \\ - & 2x^3+2x^2 & \overline{2x^2+3x-2} \\ \hline & 3x^2+x-2 & \\ - & 3x^2+3x & \\ \hline & -2x-2 & \\ - & -2x-2 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Donc $P(x) = (x+1)(2x^2+3x-2)$

3. $P(x) \leqslant 0 \iff (x+1)(2x^2+3x-2) \leqslant 0.$

Racines de $2x^2+3x-2$:

$\Delta = 3^2-4\times2\times(-2) = 25$ $\quad x_1 = \dfrac{-3-5}{4} = -2.$

$x_2 = \dfrac{-3+5}{4} = \dfrac{1}{2}.$

x	$-\infty$		-2		-1		$1/2$		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x^2+3x-2$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion : $S_1 =]-\infty,-2] \cup [-1, 1/2]$.

4. (E_2) est définie ssi $x>0$ et $2x+5>0$ et $2-x>0$.

x	$-\infty$		$-5/2$		0		2		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	

Domaine de définition de (E_2) : $]0;2[$.

5. Soit $x \in]0,2[$.

$2\ln(x) + \ln(2x+5) \leqslant \ln(2-x)$

ssi $e^{2\ln x+\ln(2x+5)} \leqslant e^{\ln(2-x)}$ $\quad (*)$

ssi $e^{\ln(x^2)+\ln(2x+5)} \leqslant 2-x$

ssi $e^{\ln(x^2(2x+5))} \leqslant 2-x$

ssi $2x^3+5x^2 \leqslant 2-x$

ssi $2x^3+5x^2+x-2 \leqslant 0.$

ssi $P(x) \leqslant 0.$

Conclusion : $S_2 = S_1 \cap]0,2[$

$S_2 =]0, 1/2]$.

$(*)$, car exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Exercice 2. $P(x) = 9x^2 + 5x - 4$.

6. x_1 et x_2 sont les RACINES de $P(x)$
si et seulement si $\begin{cases} x_1 + x_2 = -5/9 \\ x_1 \times x_2 = -4/9 \end{cases}$.

7. $\Delta = 5^2 - 4 \times 9 \times (-4) = 169$

$x_1 = \dfrac{-5-13}{18} = -\dfrac{18}{18} = -1$

$x_2 = \dfrac{-5+13}{18} = \dfrac{8}{18} = \dfrac{4}{9}$.

L'ensemble des solutions de (E_3) est $\underline{S_3 = \left\{-1 ; \frac{4}{9}\right\}}$.

8. $P(-1) = 9 - 5 - 4 = 0$ ✓

$P\left(\frac{4}{9}\right) = 9 \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 + 5 \times \frac{4}{9} - 4 = \frac{16}{9} + \frac{20}{9} - \frac{36}{9} = 0$ ✓.

ou $x_1 + x_2 = -1 + \frac{4}{9} = -\frac{9}{9} + \frac{4}{9} = -\frac{5}{9}$ ✓

$x_1 \times x_2 = \frac{-4}{9}$ ✓.

9. $P(x) = 9(x - x_1)(x - x_2)$

donc $\underline{P(x) = 9(x+1)\left(x - \frac{4}{9}\right)}$

10.

x	$-\infty$ -1 $4/9$ $+\infty$
$P(x)$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

Conclusion : $\underline{S_4 =]-\infty, -1[\cup]4/9, +\infty[}$

11. $9x^4 + 5x^2 - 4 = 0$

ssi $9X^2 + 5X - 4 = 0$ (avec $X = x^2$)

ssi $X = -1$ ou $X = \frac{4}{9}$

ssi $x^2 = -1$ ou $x^2 = \frac{4}{9}$

ssi $x = -\sqrt{\frac{4}{9}}$ ou $x = \sqrt{\frac{4}{9}}$.

Conclusion : $\underline{S_5 = \left\{-\frac{2}{3} ; \frac{2}{3}\right\}}$.

12. $9e^{2x} + 5e^x - 4 > 0$.

$\iff 9(e^x)^2 + 5e^x - 4 > 0$.

$\iff 9(e^x + 1)(e^x - 4/9) > 0$.

$\iff e^x - 4/9 > 0$ car $9(e^x + 1) > 0$.

$/9(e^x+1)$

$\iff e^x > \frac{4}{9}$

$\iff x > \ln\left(\frac{4}{9}\right)$ car $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

$S_6 = \left] \ln\left(\frac{4}{9}\right), +\infty \right[$

ou $\underline{S_6 =]2\ln 2 - 2\ln 3 ; +\infty[}$

Exercice 3.

B.

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
x^2-6x+5		$+$	0	$-$	0	$+$	

14.
15. cf graphe.
16.

17. Graphiquement $\underline{S_7 = \{0;2;5\}}$.

x	$-\infty$	1	5 $+\infty$
x^2-6x+5	$+$	0 $-$ 0	$+$
$\lvert x^2-6x+5\rvert$	x^2-6x+5	$-x^2+6x-5$	x^2-6x+5.
(E_7) $\lvert x^2-6x+5\rvert = 5-x$	Lorsque $x \leq 1$: $(E_7) \Leftrightarrow x^2-6x+5 = 5-x$ $\Leftrightarrow x^2-5x=0$. $\Leftrightarrow x(x-5)=0$ $\Leftrightarrow x=0$ ou $x-5=0$ $\Leftrightarrow x=0$ ou $x=5$ $S_1=\{0\}$ car $5 \notin]-\infty,1]$.	Lorsque $x \in [1;5]$: $(E_7) \Leftrightarrow -x^2+6x-5 = 5-x$ $\Leftrightarrow -x^2+7x-10=0$. $\Delta = 7^2-4\times(-1)\times(-10)$ $\Delta = 9$. $x_1 = \frac{-7-3}{-2} = 5$ ou $x_2 = \frac{-7+3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$ $S_2 = \{2;5\}$. car $2 \in [1;5]$ et $5 \in [1;5]$	Lorsque $x \geq 5$: $(E_7) \Leftrightarrow x=0$ ou $x=5$ $S_3=\{5\}$ car $0 \notin [5,+\infty[$

Conclusion : L'ensemble des solutions de (E_7) est $S_1 \cup S_2 \cup S_3$, c'est-à-dire $\{0;2;5\}$.