Devoir surveillé n°2

Mathématiques

Durée : 1 heure

CALCULATRICE INTERDITE

Il sera tenu compte dans la notation de la copie :

1. **De la qualité de la rédaction** :
   justification des affirmations, introduction des variables utilisées, utilisation à bon escient des symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $=$ ...
2. **De la présentation** :
   résultats encadrés, calculs bien présentés, écriture aérée et lisible...

Soit g la fonction définie par

$$g(x) = \frac{1}{x\left(x^2-1\right)}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction g, noté D_g.
2. Dresser le tableau de signes de $x(x^2-1)$ et factoriser $x(x^2-1)$.
3. Déterminer les limites de $g(x)$ aux bornes de D_g et les interpréter graphiquement. On utilisera la question précédente.
4. Déterminer a, b et c des réels tels que l'on ait, pour tout $x \in D_g$:

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$$

   et vérifier le résultat obtenu.
5. Déterminer une primitive $G(x)$ de $g(x)$ pour tout $x \in D_g$.
6. Simplifier l'expression de $G(x)$ sur l'intervalle $]1,+\infty[$.
   En cas de difficulté, on pourra admettre par la suite que $G(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)$ *pour tout* $x \in]1,+\infty[$.
7. Calculer $G(3)-G(2)$.
   On donnera le résultat exact sous la forme $p\ln 2 + q\ln 3$ avec p et q des rationnels.

Soit F la fonction définie sur l'intervalle $]1,+\infty[$ par $F(x) = \dfrac{-1}{x^2-1}$.

8. Montrer que $F(x)$ est une primitive de $f(x) = \dfrac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}$.
9. Rappeler la formule d'intégration par parties.
10. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer

$$I = \int_2^3 \frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}\ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

    On donnera le résultat exact sous la forme $p\ln 2 + q\ln 3$ avec p et q des rationnels.