NOM :
Prénom :

Lycée Louis Vincent
TSI1 - 2022/2023

Devoir surveillé n°2

Mathématiques

Durée : 2 heures

CALCULATRICE AUTORISÉE

Il sera tenu compte dans la notation de la copie :

1. **De la qualité de la rédaction** :
   justification des affirmations, introduction des variables utilisées, utilisation à bon escient des symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $=$ ...
2. **De la présentation** :
   résultats encadrés, calculs bien présentés, écriture aérée et lisible...

Exercice 1. (4 points)

1. Rappeler la formule d'intégration par parties.

Soient I et J deux intégrales définies par

$$I = \int_0^\pi \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = -J$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = J + \mathrm{e}^\pi + 1$.
4. En déduire les valeurs exactes de I et de J.

Exercice 2. (4 points)

5. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{2}\left(\cos(a-b) + \cos(a+b)\right) = \cos(a)\cos(b).$$

6. En déduire

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos(3x)\cos(2x)\,\mathrm{d}x.$$

   On donnera le résultat exact sous la forme d'une fraction irréductible.

Exercice 3. (4 points)

7. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}.$$

8. En déduire la valeur exacte de la somme

$$S = \sum_{k=10}^{100} \frac{2}{k^2-1},$$

ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-2} près.

Indication : On effectuera deux changements d'indices.
Valeur exacte : sans symbole $\sum$, ni points de suspension. On ne cherchera pas à réduire l'expression obtenue à un même dénominateur.

Exercice 4. (8 points)

Soit g la fonction définie par

$$g(x) = \frac{1}{x\left(x^2-1\right)}.$$

9. Déterminer le domaine de définition de la fonction g, noté D_g.
10. Dresser le tableau de signes de $x(x^2-1)$.
11. Déterminer les limites de $g(x)$ aux bornes de D_g et les interpréter graphiquement. On utilisera la question précédente.
12. Montrer que pour tout $x \in D_g$:

$$g(x) = \frac{1}{2} \times \left(-2 \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right).$$

13. Déterminer une primitive $G(x)$ de $g(x)$ pour tout $x \in D_g$.
14. Simplifier l'expression de $G(x)$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
En cas de difficulté, on pourra admettre par la suite que

$$G(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)$$

pour tout $x \in]1, +\infty[$.

15. Vérifier que

$$G(3) - G(2) = \frac{5}{2}\ln(2) - \frac{3}{2}\ln(3).$$

Soit F la fonction définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par $F(x) = \dfrac{-1}{x^2-1}$.

16. Montrer que $F(x)$ est une primitive de $f(x) = \dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$.
17. À l'aide d'une intégration par parties, calculer

$$I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2} \ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

On donnera le résultat exact sous la forme $p \ln 2 + q \ln 3$ avec p et q des rationnels.