# Devoir surveillé n°3

## Mathématiques

## Durée : 2 heures

CALCULATRICE INTERDITE

Il sera tenu compte dans la notation de la copie :

1. **De la qualité de la rédaction** :
   justification des affirmations, introduction des variables utilisées, utilisation à bon escient des symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $=$ ...
2. **De la présentation** :
   résultats encadrés, calculs bien présentés, écriture aérée et lisible...

**Exercice 1.** Soient $z_1 = 1 + \mathbf{i}$ et $z_2 = \sqrt{6} + \mathbf{i}\sqrt{2}$.

1. Écrire sous forme exponentielle les complexes $z_1$ et $z_2$.
2. En déduire la forme exponentielle le complexe $\dfrac{z_1}{z_2}$.
3. Montrer que $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8} + \left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}\right)\mathbf{i}$.
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

**Exercice 2.** Résolution de systèmes linéaires

5. Résoudre le système linéaire suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ :

$$(\mathcal{S}_1)\begin{cases} x - 2y - z &= 0 \\ x + 3y &= 3 \\ 3x - 2z &= 4 \end{cases}.$$

   Vérifier le résultat obtenu.

Soit $a$ un réel fixé. On considère le système linéaire suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ :

$$(\mathcal{S}_2)\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ x + 3y - 2z = 1 \\ 2x - y + az = 2 \end{cases}.$$

6. Calculer $\det(\mathcal{S}_2)$.
7. Discuter, suivant la valeur de $a$, le nombre de solutions du systeme $\mathcal{S}_2$
8. Résoudre $\mathcal{S}_2$ lorsque $a \neq 3$.

**Exercice 3.** Les 4 assertions suivantes sont vraies. Les démontrer.

9. Proposition 1 :
$$(\sqrt{2}+\mathbf{i})^5 = -11\sqrt{2}+i.$$
10. Proposition 2 : Pour tout nombre réel $\alpha$,
$$2\mathbf{i}\mathrm{e}^{\mathbf{i}\alpha}\sin(\alpha) = \mathrm{e}^{2\mathbf{i}\alpha} - 1.$$
11. Proposition 3 : Soit $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\sum_{k=0}^{n}(4k+2) = 2(n+1)^2.$$
12. Soit $\omega$ le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{7}$.
Proposition 4 : $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6 = 0$.

**Exercice 4. Factorisation - Linéarisation**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$f(x) = \sin(x) + \sin(3x).$$

13. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, factoriser $\sin(3x)$.
14. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f(x) = 4\sin(x)\left(1-\sin^2(x)\right).$$
15. Résoudre dans $]-\pi,\pi]$, l'équation : $f(x) = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$g(x) = 8\cos^4(x).$$

16. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\cos^4(x) = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}.$$
17. En déduire l'expression d'une primitive $G(x)$ de la fonction $g(x)$.

**Exercice 5. Utilisation de la formule du binôme de Newton**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On note
$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta) \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta).$$

18. Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Rappeler la formule du binôme de Newton permettant de calculer $(a+b)^n$.
19. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que :
$$\left(e^{i\theta}+1\right)^n = S_n + \mathbf{i}T_n.$$
20. Montrer que $\left(e^{i\theta}+1\right)^n = 2^n\cos^n\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{\frac{in\theta}{2}}$ (sans utiliser le résultat de la question précédente).
21. En combinant les résultats des questions précédentes, calculer les sommes $S_n$ et $T_n$. On attend des expressions factorisées.