Devoir surveillé n°3

Mathématiques

Durée : 2 heures

Exercice 1. Droites remarquables du triangle

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soient $A = (-1, 6)$, $B = (4, 1)$ et $C = (7, 2)$ trois points de $\mathscr{P}$.

On note :

H	l'orthocentre du triangle ABC,
Ω	le centre du cercle circonscrit $\mathscr{C}$ au triangle ABC,
G	le centre de gravité du triangle ABC.

1. Calculer l'aire du triangle ABC.
2. Soit $\mathscr{D}_1$ la droite d'équation $3x + y - 3 = 0$.
   Justifier que $\mathscr{D}_1$ est la hauteur issue de A du triangle ABC.
3. Déterminer une équation de $\mathscr{D}_2$, hauteur issue de B du triangle ABC.
4. Placer le point H sur la figure annexe et déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul).
5. On note :

A'	le milieu du segment $[BC]$,
B'	le milieu du segment $[AC]$,

   Placer les points A' et B' sur la figure annexe et déterminer leurs coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul)
6. Soit Δ_1 la droite d'équation $3x + y - 18 = 0$.
   Justifier que Δ_1 est la médiatrice du segment $[BC]$.
7. Déterminer une équation de Δ_2, médiatrice du segment $[AC]$.
8. Placer le point Ω sur la figure annexe et déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul).
9. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$.
10. Justifier que les coordonnées du point G sont $\left(\dfrac{10}{3}, 3\right)$ dans $\mathcal{R}$.
11. Montrer que les points H, Ω et G sont alignés.

On note :

H'	l'image du point H par la symétrie centrale de centre A'.

12. Placer le point H' sur la figure précédente et déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul - on traduira une égalité vectorielle).
13. Montrer que le point H' appartient au cercle $\mathscr{C}$.

Exercice 2. Complexes et polygone régulier

On pose

$$\omega = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{7}} \quad , \quad S = \omega + \omega^2 + \omega^4 \quad \text{et} \quad T = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6.$$

14. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} \omega^k = 0$.
15. Justifier que $\omega^8 = \omega$, que $\omega^9 = \omega^2$ et que $\omega^{10} = \omega^3$.
16. Montrer que $S + T = -1$ et que $S \times T = 2$.
17. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 2 = 0$.
18. À l'aide d'une construction géométrique, justifier que la partie imaginaire de S est positive.
19. En déduire les valeurs exactes de S et de T.
20. En remarquant que S et T sont deux nombres complexes conjugués, déterminer les valeurs exactes de

$$\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)$$

et de

$$\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right).$$

On pose

$$P(z) = (1 - z)\left(1 - z^2\right)\left(1 - z^4\right).$$

21. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$1 - \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta} = -2\mathbf{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\theta}{2}}.$$

En déduire que le module de $1 - \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$ est égal à $2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ lorsque $\theta \in [0, 2\pi]$.

22. Développer $P(z)$.
23. En déduire la valeur exacte de $P\left(\omega^2\right)$.
24. En calculant le module de $P(\omega^2)$ de deux façons différentes, déterminer la valeur exacte de

$$\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \times \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) \times \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right).$$