Devoir surveillé n°3 – Correction

Mathématiques

Exercice 1. Droites remarquables du triangle

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soient $A = (-1, 6)$, $B = (4, 1)$ et $C = (7, 2)$ trois points de $\mathscr{P}$.

On note :

H	l'orthocentre du triangle ABC,
Ω	le centre du cercle circonscrit $\mathscr{C}$ au triangle ABC,
G	le centre de gravité du triangle ABC.

1. Calculer l'aire du triangle ABC.
   $\mathscr{A}_{ABC} = \dfrac{\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right|}{2} = \dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ -5 & -4 \end{vmatrix}\right| = \dfrac{1}{2}\left|-20+40\right| = 10$ ua.
2. Soit $\mathscr{D}_1$ la droite d'équation $3x + y - 3 = 0$.
   Justifier que $\mathscr{D}_1$ est la hauteur issue de A du triangle ABC.
   Un vecteur normal de la droite $\mathscr{D}_1$ est $(3, 1) = \overrightarrow{BC}$. Donc $\mathscr{D}_1$ est perpendiculaire à (BC). De plus $3x_A + y_A - 3 = 0$, donc $A \in \mathscr{D}_1$. On en déduit que $\mathscr{D}_1$ est la hauteur issue de A du triangle ABC.
3. Déterminer une équation de $\mathscr{D}_2$, hauteur issue de B du triangle ABC.
   $\mathscr{D}_2$ passe par le point B et admet pour vecteur normal $(2, -1)$, colinéaire à $\overrightarrow{AC}$.
   $\mathscr{D}_2 \;:\; 2x - y - 7 = 0$.
4. Placer le point H sur la figure annexe et déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul).
   $H = \mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$, donc $3x_H + y_H = 3$ et $2x_H - y_H = 7$. On obtient, après résolution du système 2×2, $x_H = 2$ et $y_H = -3$.
   Conclusion : $H(2, -3)$.
5. On note :

A'	le milieu du segment $[BC]$,
B'	le milieu du segment $[AC]$,

   Placer les points A' et B' sur la figure annexe et déterminer leurs coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul).
   $x_{A'} = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{11}{2}$ et $y_{A'} = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{3}{2}$. Donc $A'\left(\dfrac{11}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$.
   De même, $B'(3, 4)$.
6. Soit Δ_1 la droite d'équation $3x + y - 18 = 0$.
   Justifier que Δ_1 est la médiatrice du segment $[BC]$.
   Δ_1 admet pour vecteur normal $(3, 1) = \overrightarrow{BC}$, donc Δ_1 est perpendiculaire à (BC). De plus $3x_{A'} + y_{A'} - 18 = 0$, donc A', milieu du segment $[BC]$ appartient à Δ_1. La droite Δ_1 est donc la médiatrice du segment $[BC]$.
7. Déterminer une équation de Δ_2, médiatrice du segment $[AC]$.
   Δ_2 passe par le point $B'(3, 4)$ et admet pour vecteur normal $(2, -1)$, colinéaire à $\overrightarrow{AC}$:
   $\Delta_2 \;:\; 2x - y - 2 = 0$.
8. Placer le point Ω sur la figure annexe et déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul).
   $\Omega = \Delta_1 \cap \Delta_2$, donc $3x_\Omega + y_\Omega = 18$ et $2x_\Omega - y_\Omega = 2$. On obtient, après résolution du système 2×2, $x_\Omega = 4$ et $y_\Omega = 6$. Conclusion : $\Omega(4, 6)$.

9. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$.
$\mathscr{C}\ :\ (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=\Omega A^2$, c'est-à-dire $\mathscr{C}\ :\ (x-4)^2+(y-6)^2=25$.

10. Justifier que les coordonnées du point G sont $\left(\frac{10}{3},3\right)$ dans $\mathcal{R}$.
On sait que $x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{10}{3}$ et que $y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=3$.

11. Montrer que les points H, Ω et G sont alignés.
On a $\det\left(\overrightarrow{H\Omega},\overrightarrow{HG}\right)=\begin{vmatrix}2 & \frac{4}{3}\\ 9 & 6\end{vmatrix}=0$, donc $\overrightarrow{H\Omega}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont colinéaires et les points H, Ω et G sont alignés.

On note :

H' l'image du point H par la symétrie centrale de centre A'.

12. Placer le point H' sur la figure précédente et déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul - on traduira une égalité vectorielle).
On a, par définition, $\overrightarrow{HA'}=\overrightarrow{A'H'}$ donc

$$\begin{cases}x_{H'}-x_{A'}=x_{A'}-x_H\\ y_{H'}-y_{A'}=y_{A'}-y_H\end{cases}$$

donc

$$\begin{cases}x_{H'}=2x_{A'}-x_H=9\\ y_{H'}=2y_{A'}-y_H=6\end{cases}.$$

Conclusion : $H'\left(9,6\right)$.

13. Montrer que le point H' appartient au cercle $\mathscr{C}$.
On a $(x_{H'}-4)^2+(y_{H'}-6)^2=25$ donc $H'\in\mathscr{C}$.

Exercice 2. Complexes et polygone régulier

On pose

$$\omega=\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{7}}\quad,\quad S=\omega+\omega^2+\omega^4\quad\text{et}\quad T=\omega^3+\omega^5+\omega^6.$$

14. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{6}\omega^k=0$.
On constate que $\omega^7=\mathrm{e}^{\mathbf{i}2\pi}=1$. Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{6}\omega^k&=\frac{\omega^7-1}{\omega-1} && \text{car } \omega\neq 1\\ &=0 && \text{car } \omega^7=1.\end{aligned}$$

15. Justifier que $\omega^8=\omega$, que $\omega^9=\omega^2$ et que $\omega^{10}=\omega^3$.
Comme $\omega^7=1$, on a $\omega^8=\omega^7\times\omega=\omega$, $\omega^9=\omega^7\times\omega^2=\omega^2$ et $\omega^{10}=\omega^7\times\omega^3=\omega^3$.

16. Montrer que $S+T=-1$ et que $S\times T=2$.

$$\begin{aligned}S+T&=\omega+\omega^2+\omega^4+\omega^3+\omega^5+\omega^6\\ &=\sum_{k=0}^{6}\omega^k-1\\ &=-1\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}S\times T&=\left(\omega+\omega^2+\omega^4\right)\left(\omega^3+\omega^5+\omega^6\right)\\ &=\omega^4+\omega^6+\omega^7+\omega^5+\omega^7+\omega^8+\omega^7+\omega^9+\omega^{10}\\ &=\omega^4+\omega^6+1+\omega^5+1+\omega+1+\omega^2+\omega^3\\ &=\sum_{k=0}^{6}\omega^k+2\\ &=2.\end{aligned}$$

17. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+z+2=0$.

L'ensemble des solutions est

$$\left\{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}\mathbf{i};-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\mathbf{i}\right\}$$

18. À l'aide d'une construction géométrique, justifier que la partie imaginaire de S est positive.

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(S) &= \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)}_{\geqslant 0}+\underbrace{\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)}_{\geqslant 0}+\underbrace{\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)}_{\leqslant 0}\\ &= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\\ &= \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}_{\geqslant 0}+\underbrace{\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)}_{\geqslant 0}\end{aligned}$$

$$\geqslant 0$$

car $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \geqslant \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$.

19. En déduire les valeurs exactes de S et de T.

D'après les relations coefficients/racines, S et T sont les solutions de l'équation $z^2+z+2=0$. De plus $\mathrm{Im}(S)$ est positive. Donc

$$S=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\mathbf{i} \quad \text{et} \quad T=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}\mathbf{i}.$$

20. En remarquant que S et T sont deux nombres complexes conjugués, déterminer les valeurs exactes de

$$\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)$$

et de

$$\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right).$$

On a

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) &= \mathrm{Re}(\omega+\omega^2+\omega^4)\\ &= \mathrm{Re}(S)\\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) &= \mathrm{Im}(\omega+\omega^2+\omega^4)\\ &= \mathrm{Im}(S)\\ &= \frac{\sqrt{7}}{2}.\end{aligned}$$

On pose

$$P(z)=(1-z)\left(1-z^2\right)\left(1-z^4\right).$$

21. Montrer que pour tout $\theta\in\mathbb{R}$,

$$1-\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}=-2\mathbf{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\theta}{2}}.$$

En déduire que le module de $1-\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$ est égal à $2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ lorsque $\theta\in[0,2\pi]$.

Soit $\theta\in[0,2\pi]$. On a

$$\begin{aligned}-2\mathbf{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\theta}{2}} &= -\cancel{2\mathbf{i}}\frac{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\theta}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\frac{\theta}{2}}}{\cancel{2\mathbf{i}}}\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\theta}{2}}\\ &= -\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\theta}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\frac{\theta}{2}}\right)\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\theta}{2}}\\ &= -\left(\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}-1\right)\\ &= 1-\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\left|1-\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}\right| &= \left|-2\mathbf{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\theta}{2}}\right| \\ &= \left|-2\mathbf{i}\right| \times \left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| \times \left|\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{\theta}{2}}\right| \\ &= 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \times 1\end{aligned}$$

car, lorsque $\theta \in [0, 2\pi]$, $\dfrac{\theta}{2} \in [0, \pi]$ et $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \geqslant 0$.

22. Développer $P(z)$.

$$\begin{aligned}P(z) &= (1-z)\left(1-z^2\right)\left(1-z^4\right) \\ &= \left(1-z-z^2+z^3\right)\left(1-z^4\right) \\ &= 1-z-z^2+z^3-z^4+z^5+z^6-z^7.\end{aligned}$$

23. En déduire la valeur exacte de $P\left(\omega^2\right)$.

On a

$$\begin{aligned}P\left(\omega^2\right) &= 1-\omega^2-\omega^4+\omega^6-\omega^8+\omega^{10}+\omega^{12}-\omega^{14} \\ &= 1-\omega^2-\omega^4+\omega^6-\omega+\omega^3+\omega^5-1 \\ &= -(\omega+\omega^2+\omega^4)+(\omega^3+\omega^5+\omega^6) \\ &= -S+T \\ &= -\sqrt{7}\mathbf{i}.\end{aligned}$$

Conclusion : $P(\omega^2) = -\sqrt{7}\mathbf{i}$.

24. En calculant le module de $P(\omega^2)$ de deux façons différentes, déterminer la valeur exacte de

$$\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \times \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) \times \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right).$$

D'une part,

$$\left|P(\omega^2)\right| = \left|-\sqrt{7}\mathbf{i}\right| = \sqrt{7}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\left|P(\omega^2)\right| &= \left|\left(1-\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{4\pi}{7}}\right)\left(1-\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{8\pi}{7}}\right)\left(1-\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{16\pi}{7}}\right)\right| \\ &= \left|1-\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{4\pi}{7}}\right| \times \left|1-\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{8\pi}{7}}\right| \times \left|1-\mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{16\pi}{7}}\right| \\ &= 2\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \times 2\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) \times \left|2\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)\right| \\ &= 2\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \times 2\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) \times \left(-2\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)\right) \\ &= -8\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \times \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) \times \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right).\end{aligned}$$

Donc

$$-8\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \times \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) \times \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \sqrt{7}$$

donc

$$\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \times \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) \times \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = -\frac{\sqrt{7}}{8}.$$