Devoir surveillé n°4 – Mathématiques – Durée : 2 heures
CALCULATRICE INTERDITE

Exercice 1. (12 points) Droites remarquables du triangle

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soient $A(-1, 6)$, $B(4, 1)$ et $C(7, 2)$ trois points de $\mathscr{P}$.

On note :

H l'orthocentre du triangle ABC,
Ω le centre du cercle circonscrit $\mathscr{C}$ au triangle ABC,
G le centre de gravité du triangle ABC.

1. Calculer l'aire du triangle ABC.
2. Soit $\mathscr{D}_1$ la droite d'équation $3x + y - 3 = 0$.
   Justifier que $\mathscr{D}_1$ est la hauteur issue de A du triangle ABC.
3. Déterminer une équation de $\mathscr{D}_2$, hauteur issue de B du triangle ABC.
4. Placer le point H sur la figure annexe et déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul).
5. On note :
   I le milieu du segment $[BC]$,
   J le milieu du segment $[AC]$,

   Placer les points I et J sur la figure annexe et déterminer leurs coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul)
6. Soit Δ_1 la droite d'équation $3x + y - 18 = 0$.
   Justifier que Δ_1 est la médiatrice du segment $[BC]$.
7. Déterminer une équation de Δ_2, médiatrice du segment $[AC]$.
8. Placer le point Ω sur la figure annexe et déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul).
9. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$.
10. Justifier que les coordonnées du point G sont $\left(\frac{10}{3}, 3\right)$ dans $\mathcal{R}$.
11. Montrer que les points H, Ω et G sont alignés.

On note :

H' l'image du point H par la symétrie centrale de centre I.

12. Placer le point H' sur la figure précédente et déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul - on traduira une égalité vectorielle).
13. Montrer que le point H' appartient au cercle $\mathscr{C}$.

Tourner la page svp

On considère la droite $\mathscr{D}$ du plan

$$\mathscr{D} \ : \ 4x + 3y - 9 = 0.$$

14. Quelle est la nature de l'intersection entre le cercle $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$?
15. Préciser $\mathscr{C} \cap \mathscr{D}$.

Exercice 2. (6 POINTS) UNE ÉTUDE DE FONCTION

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\cos(x) - \sin(x) \end{array}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

16. Étudier la parité de la fonction f. Que peut-on en déduire concernant son graphe ?
17. Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On note I_n l'intervalle $[n\pi; (n+1)\pi]$ pour $n \in \mathbb{N}$.

18. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle I_0 $(n = 0)$.
19. Préciser, en fonction de la parité de n, les variations de f sur l'intervalle I_n.
20. Montrer que les points de $\mathscr{C}$ d'abscisse x tels que $f'(x) = 0$ sont situés sur deux droites dont on précisera les équations.
21. Construire la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$ (unité graphique : 1 cm).
    On représentera les points évoqués à la question précédente, ainsi que les tangentes à la courbe en ces points.

Exercice 3. (2 POINTS) PARITÉ D'UNE FONCTION

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right).$$

22. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
23. Montrer que f est une fonction impaire.