Devoir surveillé n°4

Mathématiques

Durée : 2 heures

CALCULATRICE INTERDITE

Il sera tenu compte dans la notation de la copie :

1. **De la qualité de la rédaction** :
   justification des affirmations, introduction des variables utilisées, utilisation à bon escient des symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $=$ ...
2. **De la présentation** :
   résultats encadrés, calculs bien présentés, écriture aérée et lisible...

Exercice 1. Intégration par parties

1. Déterminer
$$\int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}x$$
à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 2. Logique

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer par contraposée que
$$n^2 \text{ pair } \Longrightarrow n \text{ pair.}$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3. « $1 \leqslant x < y$ » est la conjonction de deux propositions. Lesquelles ? Nier cette proposition.
4. « $xy = 0$ » est la disjonction de deux propositions. Lesquelles ? Nier cette proposition (avec des propositions portant séparément sur x et/ou y).

Exercice 3. Étude d'une fonction

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}.$$

5. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
6. Montrer que la fonction f est impaire. Interpréter graphiquement ce résultat.
7. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = 1 - f(x)^2 = \frac{4}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2}.$$
8. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}.$$
En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement ce résultat.

9. Dresser le tableau de variations de f sur $[0;+\infty[$.
10. Tracer $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.
11. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur I, un intervalle à préciser.

    On note f^{-1} sa bijection réciproque.
12. Montrer que f^{-1} est dérivable sur I et déterminer l'expression de sa dérivée $\left(f^{-1}\right)'(x)$ pour $x \in I$.

Exercice 4. Les fonctions trigonométriques réciproques

L'objectif de cet exercice est de calculer

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)$$

On introduit les notations suivantes :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{2}\right), \quad \beta = \arctan\left(\frac{1}{5}\right), \quad \gamma = \arctan\left(\frac{1}{8}\right).$$

On rappelle que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a).$$

13. Montrer que pour tout $(a,b) \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}.$$

14. Déterminer $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$.
15. Donner les valeurs de $\arctan(0)$ et de $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
16. Justifier que $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{8}$ appartiennent à l'intervalle $\left]0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$.
17. En déduire que $0 < \alpha+\beta+\gamma < \frac{\pi}{2}$.
18. Calculer $\tan(\alpha+\beta)$ et vérifier que

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{7}{9}.$$

19. Calculer $\tan(\alpha+\beta+\gamma)$.
20. Conclure.

Devoir surveillé n°4 (version 2)

Mathématiques

Durée : 2 heures

CALCULATRICE INTERDITE

Il sera tenu compte dans la notation de la copie :

1. **De la qualité de la rédaction** :
   justification des affirmations, introduction des variables utilisées, utilisation à bon escient des symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $=$ ...
2. **De la présentation** :
   résultats encadrés, calculs bien présentés, écriture aérée et lisible...

Exercice 1. Intégration par parties

1. Déterminer
$$\int_0^1 \arcsin(x)\,\mathrm{d}x$$
à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 2. Logique

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note I l'implication n^2 pair $\Longrightarrow$ n pair.
   Quelle est la contraposée de cette implication ?
3. La démontrer.
4. Conclure.
5. Raisonnement par l'absurde : Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 3. Étude de fonctions

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$\mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$
Ces fonctions sont appelées *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique*.

6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1.$$
7. Étudier la parité des fonctions ch et sh. Que peut-on en déduire concernant le graphe de chacune de ces fonctions ?
8. Montrer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$.
9. Dresser le tableau de variations de la fonction sh sur $\mathbb{R}$.

10. Montrer que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur I, un intervalle à préciser.

    On note $\operatorname{argsh} : I \to \mathbb{R}$ sa bijection réciproque ($\operatorname{argsh} = \operatorname{sh}^{-1}$).

11. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
    Montrer que :
$$\operatorname{sh}(x) = y \iff \mathrm{e}^{2x} - 2y\mathrm{e}^{x} - 1 = 0.$$
12. Résoudre l'équation $X^2 - 2yX - 1 = 0$, d'inconnue $X \in \mathbb{R}^{+\star}$
13. En déduire que $\operatorname{argsh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$.

Exercice 4. Les fonctions trigonométriques réciproques

L'objectif de cet exercice est de calculer

$$\arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{16}{65}\right).$$

On introduit les notations suivantes :

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{5}{13}\right), \quad \beta = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right), \quad \gamma = \arcsin\left(\frac{16}{65}\right).$$

On rappelle que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

et que pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\cos\left(\arcsin(x)\right) = \sqrt{1-x^2}.$$

14. Vérifier que
$$\cos(\alpha) = \frac{12}{13} \quad \text{et} \quad \cos(\beta) = \frac{3}{5}.$$
15. Déterminer $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
16. Justifier que
$$0 < \frac{5}{13} < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 < \frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$
17. En déduire que
$$0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}.$$
18. Calculer $\cos(\alpha+\beta)$ et vérifier que
$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{16}{65}.$$
19. En déduire que
$$\sin(\alpha+\beta) = \sqrt{1 - \left(\frac{16}{65}\right)^2}.$$
20. Déterminer $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ et conclure.