Correction DS 4.

① $\displaystyle\int_0^1 1 \times \arctan(x)\,dx$

$$= \left[x \times \arctan(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \arctan(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\ln\left(|1+x^2|\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\ln(2) - \ln(1)\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2).$$

CCL : $\displaystyle\int_0^1 \arctan(x)\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2).$

② I : n^2 pair $\Longrightarrow$ n pair

C : n impair $\Longrightarrow$ n^2 impair.

On suppose que n est un entier impair.

Alors $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$.

donc $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$

donc $n^2 = 2\underbrace{(2k^2+2k)}_{\text{entier}}+1$ donc n^2 est impair.

On a montré C, or I $\iff$ C, donc I est vraie.

CCL : n^2 pair $\Longrightarrow$ n pair

③ $1 \leq x < y \iff (1 \leq x)$ et $(x < y)$

$\overline{1 \leq x < y} \iff (1 > x)$ ou $(x \geq y)$.

④ $xy = 0 \iff (x=0)$ ou $(y=0)$

$\overline{xy = 0} \iff x \neq 0$ et $y \neq 0$.

⑤. pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \dfrac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}}$

or $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

donc $e^x + \dfrac{1}{e^x} \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

CCL : f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

⑥ Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x}+e^{x}} = -\frac{(e^{x} - e^{-x})}{e^{x}+e^{-x}} = -f(x)$$

CCL : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$

$\Longrightarrow$ f est impaire et $\mathcal{C}_f$ symétrique / O.

⑦ $$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$ avec $u(x) = e^{x} - e^{-x}$
$v(x) = e^{x} + e^{-x}$
$u'(x) = e^{x} + e^{-x}$
$v'(x) = e^{x} - e^{-x}$

donc $$f'(x) = \frac{(e^{x}+e^{-x})^2 - (e^{x}-e^{-x})^2}{(e^{x}+e^{-x})^2}$$

D'une part

$$f'(x) = \frac{(e^{x}+e^{-x})^2}{(e^{x}+e^{-x})^2} - \frac{(e^{x}-e^{-x})^2}{(e^{x}+e^{-x})^2}$$
$$= 1 - \left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\right)^2$$
$$= 1 - f(x)^2$$

D'autre part

$$f'(x) = \frac{(e^{x}+e^{-x}+e^{x}-e^{-x}) \times (e^{x}+e^{-x}-e^{x}+e^{-x})}{(e^{x}+e^{-x})^2}$$
$$= \frac{2e^{x} \times 2e^{-x}}{(e^{x}+e^{-x})^2}$$
$$= \frac{4}{(e^{x}+e^{-x})^2}.$$

CCL : $\boxed{f'(x) = 1 - f(x)^2 = \frac{4}{(e^{x}+e^{-x})^2}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

⑧ $$f(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}. \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

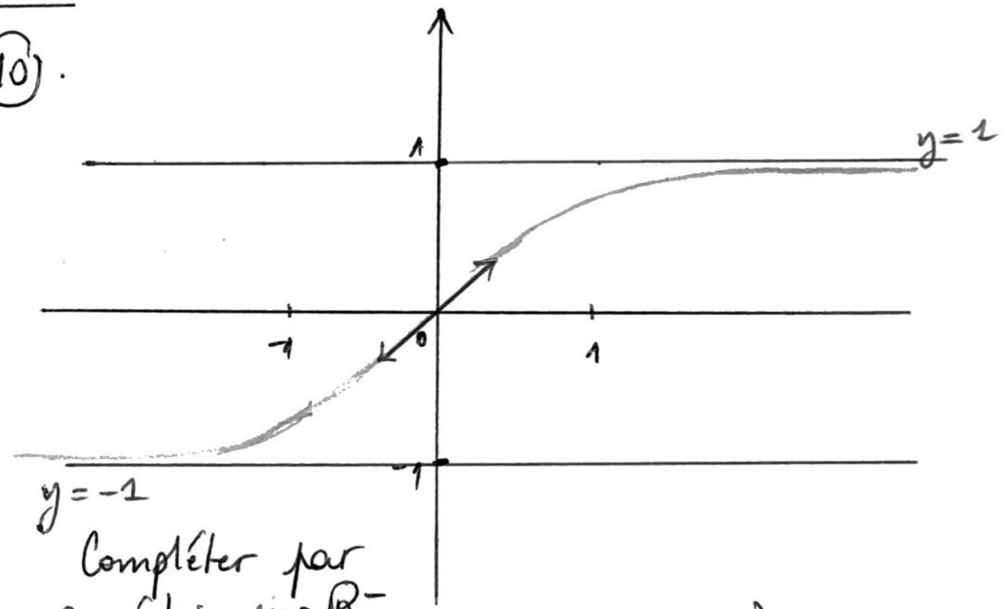
Donc $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

CCL : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$
et $\mathcal{C}_f$ admet une Asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$.

⑨ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	1	$+$	
$f(x)$	0	↗	1

⑩.



Compléter par symétrie sur $\mathbb{R}^-$
$\mathcal{C}_f$ sym/O (O : origine du repère).

⑪. f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$ (THEOREME DE LA BIJECTION)

(12). f est dérivable sur $\mathbb{R}$
et pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) > 0$
(et donc f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$)

Donc f^{-1} est dérivable sur $]-1,1[$
et pour tout $x \in]-1,1[$;

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$
$$= \frac{1}{1 - f(f^{-1}(x))^2} \quad \text{d'après (7)}$$
$$= \frac{1}{1-x^2}.$$

CCL : $\boxed{\forall x \in]-1,1[\, , \ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{1-x^2}}$.

(13). $$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$$
$$= \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$
$$= \frac{\frac{\sin a \cancel{\cos b}}{\cos a \cancel{\cos b}} + \frac{\sin b \cancel{\cos a}}{\cancel{\cos a} \cos b}}{\cancel{\frac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b}} - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}}$$
$$= \frac{\sin a/\cos a + \sin b/\cos b}{1 - \frac{\sin a}{\cos a} \times \frac{\sin b}{\cos b}}$$
$$= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a . \tan b} \quad \square.$$

(14). $$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin(\pi/6)}{\cos(\pi/6)} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(15) $\arctan(0) = 0$
et $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$.

(16) $\frac{1}{2} \in]0, \frac{1}{\sqrt{3}}[\iff 0 < \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\iff 0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ ✓

donc $\frac{1}{2} \in]0, \frac{1}{\sqrt{3}}[$

$\frac{1}{5} \in]0, \frac{1}{\sqrt{3}}[\iff 0 < \frac{1}{5} < \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\iff 0 < \frac{1}{25} < \frac{1}{3}$ ✓

donc $\frac{1}{5} \in]0, \frac{1}{\sqrt{3}}[$.

$\frac{1}{8} \in]0, \frac{1}{\sqrt{3}}[\iff 0 < \frac{1}{8} < \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\leftrightarrow 0 < \frac{1}{64} < \frac{1}{3}$ ✓

donc $\frac{1}{8} \in]0, \frac{1}{\sqrt{3}}[$.

(17). $\frac{1}{2} \in]0, \frac{1}{\sqrt{3}}[\implies 0 < \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\implies \arctan(0) < \arctan\frac{1}{2} < \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\implies 0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$.

car arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

De même $0 < \beta < \frac{\pi}{6}$ et $0 < \gamma < \frac{\pi}{6}$.

Ainsi $0 < \alpha+\beta+\gamma < \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}$

ie $\underline{0 < \alpha+\beta+\gamma < \frac{\pi}{2}}$.

(18) $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$ # $\tan\alpha = \tan\left(\arctan\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

$$= \frac{1/2 + 1/5}{1 - 1/2 \times 1/5} \times \frac{10}{10}$$

$$= \frac{5+2}{10-1}$$

$$= \frac{7}{9}.$$

On a bien $\tan(\alpha+\beta) = \frac{7}{9}$.

(19) $\tan((\alpha+\beta)+\gamma) = \frac{\tan(\alpha+\beta) + \tan(\gamma)}{1 - \tan(\alpha+\beta)\tan\gamma}$.

$$= \frac{7/9 + 1/8}{1 - \frac{7}{9}\times\frac{1}{8}} \times \frac{9\times 8}{9\times 8}.$$

$$= \frac{56+9}{72-7}$$

$$= \frac{65}{65} = 1.$$

(20). $\tan(x) = y \Leftrightarrow x = \arctan(y)$ $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $y \in \mathbb{R}$.

$\tan(\alpha+\beta+\gamma) = 1$ et $\alpha+\beta+\gamma \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$

d'où $\alpha+\beta+\gamma = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.