Devoir surveillé n°3 – Correction

Mathématiques

Exercice 1. Droites remarquables du triangle

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soient $A = (-1, 6)$, $B = (4, 1)$ et $C = (7, 2)$ trois points de $\mathscr{P}$.

On note :

H l'orthocentre du triangle ABC,
Ω le centre du cercle circonscrit $\mathscr{C}$ au triangle ABC,
G le centre de gravité du triangle ABC.

1. Calculer l'aire du triangle ABC.
$\mathscr{A}_{ABC} = \dfrac{\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right|}{2} = \dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ -5 & -4 \end{vmatrix}\right| = \dfrac{1}{2}|-20+40| = 10$ ua.

2. Soit $\mathscr{D}_1$ la droite d'équation $3x + y - 3 = 0$.
Justifier que $\mathscr{D}_1$ est la hauteur issue de A du triangle ABC.
Un vecteur normal de la droite $\mathscr{D}_1$ est $(3, 1) = \overrightarrow{BC}$. Donc $\mathscr{D}_1$ est perpendiculaire à (BC). De plus $3x_A + y_A - 3 = 0$, donc $A \in \mathscr{D}_1$. On en déduit que $\mathscr{D}_1$ est la hauteur issue de A du triangle ABC.

3. Déterminer une équation de $\mathscr{D}_2$, hauteur issue de B du triangle ABC.
$\mathscr{D}_2$ passe par le point B et admet pour vecteur normal $(2, -1)$, colinéaire à $\overrightarrow{AC}$.
$\mathscr{D}_2 \,:\, 2x - y - 7 = 0$.

4. Placer le point H sur la figure annexe et déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul).
$H = \mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$, donc $3x_H + y_H = 3$ et $2x_H - y_H = 7$. On obtient, après résolution du système 2×2, $x_H = 2$ et $y_H = -3$.
Conclusion : $H(2, -3)$.

5. On note :
I le milieu du segment $[BC]$,
J le milieu du segment $[AC]$,

Placer les points I et J sur la figure annexe et déterminer leurs coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul).
$x_I = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{11}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{3}{2}$. Donc $I\left(\dfrac{11}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$.
De même, $J\,(3, 4)$.

6. Soit Δ_1 la droite d'équation $3x + y - 18 = 0$.
Justifier que Δ_1 est la médiatrice du segment $[BC]$.
Δ_1 admet pour vecteur normal $(3, 1) = \overrightarrow{BC}$, donc Δ_1 est perpendiculaire à (BC). De plus $3x_{A'} + y_{A'} - 18 = 0$, donc I, milieu du segment $[BC]$ appartient à Δ_1. La droite Δ_1 est donc la médiatrice du segment $[BC]$.

7. Déterminer une équation de Δ_2, médiatrice du segment $[AC]$.
Δ_2 passe par le point $J(3, 4)$ et admet pour vecteur normal $(2, -1)$, colinéaire à $\overrightarrow{AC}$:
$\Delta_2 \,:\, 2x - y - 2 = 0$.

8. Placer le point Ω sur la figure annexe et déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul).
$\Omega = \Delta_1 \cap \Delta_2$, donc $3x_\Omega + y_\Omega = 18$ et $2x_\Omega - y_\Omega = 2$. On obtient, après résolution du système 2×2, $x_\Omega = 4$ et $y_\Omega = 6$. Conclusion : $\Omega(4, 6)$.

9. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$.
   $\mathscr{C} \,:\, (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = \Omega A^2$, c'est-à-dire $\mathscr{C} \,:\, (x-4)^2 + (y-6)^2 = 25$.
10. Justifier que les coordonnées du point G sont $\left(\dfrac{10}{3}, 3\right)$ dans $\mathcal{R}$.
    On sait que $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{10}{3}$ et que $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = 3$.
11. Montrer que les points H, Ω et G sont alignés.
    On a $\det\left(\overrightarrow{H\Omega}, \overrightarrow{HG}\right) = \begin{vmatrix} 2 & \frac{4}{3} \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 0$, donc $\overrightarrow{H\Omega}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont colinéaires et les points H, Ω et G sont alignés.

On note :

$$H' \quad \text{l'image du point } H \text{ par la symétrie centrale de centre } I.$$

12. Placer le point H' sur la figure précédente et déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ (par le calcul - on traduira une égalité vectorielle).
    On a, par définition, $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{IH'}$ donc
    $$\begin{cases} x_{H'} - x_I = x_I - x_H \\ y_{H'} - y_I = y_I - y_H \end{cases}$$
    donc
    $$\begin{cases} x_{H'} = 2x_I - x_H = 9 \\ y_{H'} = 2y_I - y_H = 6 \end{cases}.$$
    Conclusion : $H'\,(9, 6)$.
13. Montrer que le point H' appartient au cercle $\mathscr{C}$.
    On a $(x_{H'} - 4)^2 + (y_{H'} - 6)^2 = 25$ donc $H' \in \mathscr{C}$.

On considère la droite $\mathscr{D}$ du plan

$$\mathscr{D} \,:\, 4x + 3y - 9 = 0.$$

14. Quelle est la nature de l'intersection entre le cercle $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$?
    $\mathrm{d}\,(\Omega, \mathscr{D}) = \dfrac{|4x_\Omega + 3y_\Omega - 9|}{\sqrt{4^2 + 9^2}} = 5 = r$ donc $\mathscr{C} \cap \mathscr{D}$ est un point, le projeté orthogonal de Ω sur la droite $\mathscr{D}$.
15. Préciser $\mathscr{C} \cap \mathscr{D}$.
    On a
    $$\begin{aligned} (x,y) \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D} &\iff \begin{cases} (x-4)^2 + (y-6)^2 = 25 \\ 4x + 3y - 9 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (x-4)^2 + (y-6)^2 = 25 \\ y = -\frac{4}{3}x + 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (x-4)^2 + (-\frac{4}{3}x - 3)^2 = 25 \\ y = -\frac{4}{3}x + 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \frac{25}{9}x^2 = 0 \\ y = -\frac{4}{3}x + 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \end{aligned}$$
    Conclusion : $\mathscr{C} \cap \mathscr{D} = \{(0,3)\}$.

Exercice 2. (6 points) Une étude de fonction

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\cos(x) - \sin(x) \end{array}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

16. Étudier la parité de la fonction f. Que peut-on en déduire concernant son graphe ?

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(-x) &= -x\cos(-x) - \sin(-x) \\ &= -x\cos(x) + \sin(x) \\ &= -\left(x\cos(x) - \sin(x)\right) \\ &= -f(x), \end{aligned}$$

donc f est une fonction impaire et $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

17. Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = 1\cos(x) + x \times (-\sin(x)) - \cos(x) = -x\sin(x).$$

On note I_n l'intervalle $[n\pi; (n+1)\pi]$ pour $n \in \mathbb{N}$.

18. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle I_0 ($n = 0$).
   $I_0 = [0, \pi]$

x	0		π
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\pi$

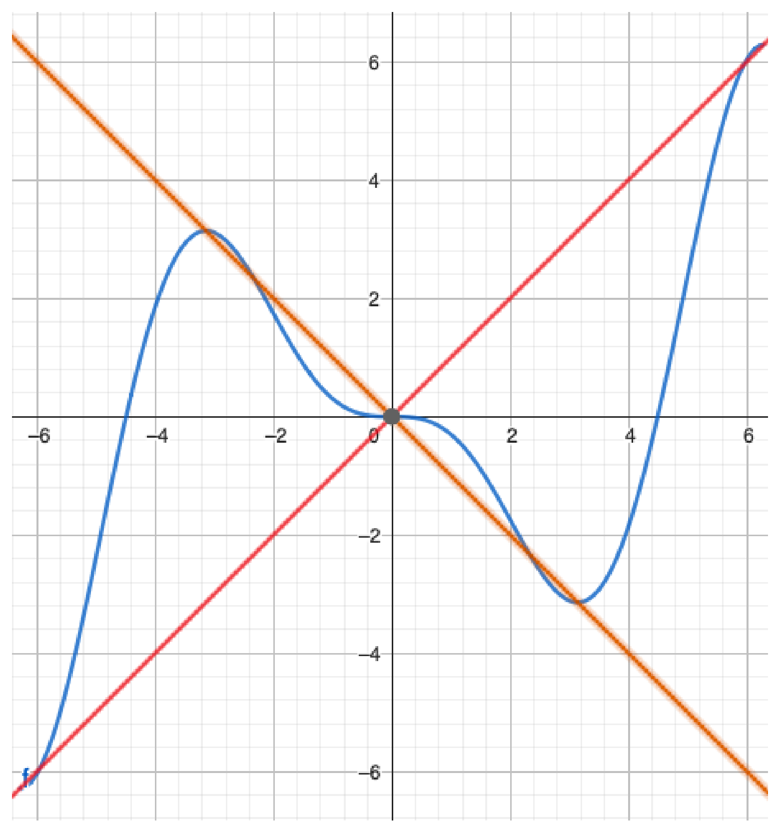
19. Préciser, en fonction de la parité de n, les variations de f sur l'intervalle I_n.
   Si n est pair, alors f' est négative sur I_n et f est décroissante sur I_n.
   Si n est impair, alors f' est positive sur I_n et f est croissante sur I_n.

20. Montrer que les points de $\mathscr{C}$ d'abscisse x tels que $f'(x) = 0$ sont situés sur deux droites dont on précisera les équations.
   On a

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff -x\sin(x) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } \sin(x) = 0 \\ &\iff x = k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

   Lorsque k est pair, $f(k\pi) = k\pi$ et lorsque k est impair, $f(k\pi) = -k\pi$.
   Les points de la courbe tels que $f'(x) = 0$ sont situés soit sur la droite d'équation $y = x$ (k pair) soit sur la droite $y = -x$ (k impair).

21. Construire la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$ (unité graphique : 1 cm).
   On représentera les points évoqués à la question précédente, ainsi que les tangentes à la courbe en ces points.



Exercice 3. (2 points) Parité d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right).$$

22. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
    Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} > |x| \geqslant -x$ donc
    $$\sqrt{x^2+1}+x > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$
    et f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.
23. Montrer que f est une fonction impaire.
    Montrons que $f(-x)+f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
    $$\begin{aligned} f(-x)+f(x) &= \ln\left(\sqrt{(-x)^2+1}-x\right)+\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) \\ &= \ln\left(\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right) \\ &= \ln\left(\sqrt{x^2+1}^2-x^2\right) \\ &= \ln(1) \\ &= 0. \end{aligned}$$
    Conclusion : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$ et la fonction f est impaire.