Devoir surveillé n°5

Mathématiques

Durée : 2 heures

Exercice 1. Raisonnement par récurrence

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 10 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $3 \leqslant u_n \leqslant 4$.

Exercice 2. Équations différentielles

Partie A.

2. Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \left(1+x^2\right) y' + 2xy = 1 + 3x^2 \quad \text{sur } \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Partie B.

On considère l'équation différentielle

$$(E1) \ : \ y' + y = \ln(x) + \frac{1}{x} \quad \text{sur } \mathbb{R}^{+\star}.$$

3. Déterminer (sans calculs) une solution particulière de l'équation $(E1)$.

On considère l'équation différentielle

$$(E2) \ : \ y'' + 5y' + 6y = \frac{x\ln(x) + 1}{x\mathrm{e}^{2x}} \quad \text{sur } \mathbb{R}^{+\star}.$$

4. Résoudre l'équation homogène associée à l'équation $(E2)$.

Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$, deux fois dérivable. On considère la fonction g définie par pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$:

$$g(x) = f(x)\mathrm{e}^{2x}.$$

5. Montrer que : $g'(x)$ est solution de $(E1)$ si et seulement si $f(x)$ est solution de $(E2)$.

6. En déduire une solution particulière de l'équation $(E2)$, à l'aide d'une intégration par parties.

7. Résoudre l'équation $(E2)$.

Exercice 3. Géométrie élémentaire de l'espace

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les plans $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ d'équations :

$$\mathcal{Q}_1 \ : \ x+2y-z+1=0 \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}_2 \ : \ x-y+2z-2=0.$$

8. Montrer que $\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2$ est une droite $\mathscr{D}$ dont on précisera une représentation paramétrique.

Soit $m \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{P}_m$ l'ensemble d'équation

$$\mathcal{P}_m \ : \ (x+2y-z+1)+m(x-y+2z-2)=0.$$

9. Justifier que $\mathcal{P}_m$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}_m\,(1+m, 2-m, 2m-1)$.

10. Montrer que $\mathscr{D} \subset \mathcal{P}_m$.

11. Parmi les plans $\mathcal{P}_m$, en existe-t-il un qui soit perpendiculaire à $\mathcal{Q}_1$? Si oui, lequel ?

12. On considère $\mathscr{S}$ l'ensemble d'équation

$$\mathscr{S} \ : \ x^2+y^2+z^2+2x-4y+1=0.$$

Vérifier que $\mathscr{S}$ est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon r.

13. On note d_m la distance du point Ω au plan $\mathcal{P}_m$. Montrer que

$$d_m = \frac{|4-5m|}{\sqrt{6}\sqrt{m^2-m+1}}.$$

14. Existe-t-il des plans $\mathcal{P}_m$ tangents à la sphère $\mathscr{S}$? Si oui, combien ?

15. Justifier que $\mathcal{P}_1 \cap \mathscr{S}$ est un cercle dont on précisera le centre H et le rayon ρ.

16. Déterminer une équation de la sphère Σ circonscrite au tétraèdre dont les faces ont pour équations cartésiennes :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &: \ x+y+z=0 \quad , \\ \mathcal{F}_2 &: \ x+y-z=2 \quad , \\ \mathcal{F}_3 &: \ x-y+z=4 \quad , \\ \mathcal{F}_4 &: \ x-y-z=-6 \quad . \end{aligned}$$