Devoir surveillé n°5 – Mathématiques – Durée : 2 heures
CALCULATRICE AUTORISÉE

Exercice 1. Géométrie élémentaire de l'espace

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère trois points :

$$A\,(1,2,-1) \quad B\,(-3,-2,3) \quad \text{et} \quad C\,(0,-2,-3)\,.$$

1. Les points A, B et C définissent-ils un plan ?
2. Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).
3. Déterminer une représentation cartésienne du plan (ABC).

Soit P le plan d'équation $x+y-z+2=0$.

4. Les plans P et (ABC) sont-ils perpendiculaires ? Justifier.

Soit G le point de l'espace vérifiant

$$\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}\,.$$

5. Montrer que quel que soit le point M de l'espace, on a

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}.$$

En particulier $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

6. En déduire que les coordonnées de G sont $(2,0,-5)$.
7. Déterminer la distance du point C au plan P.
8. Montrer que la droite (CG) est orthogonale au plan P.
9. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CG).

On note H le projeté orthogonal du point C sur le plan P.

10. Déterminer les coordonnées du point H.
11. Retrouver le résultat de la question 7.

On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = 12.$$

12. Montrer que $\mathscr{S}$ est la sphère de centre G et de rayon 6.
13. Déterminer l'équation de $\mathscr{S}$.
14. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection du plan P et de la sphère $\mathscr{S}$.

Tourner la page svp

Exercice 2. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Les parties* A *et* B *sont indépendantes.

Partie A

15. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$y' - y = xe^x \quad (E).$$

16. Déterminer l'unique solution de (E) qui s'annule en 1.

Partie B

On considère l'équation différentielle :

$$(E_1) \ : \ y' + y = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} \quad \text{sur }]0, +\infty[.$$

17. Déterminer une solution particulière de l'équation (E_1).
(*On pourra essayer de chercher une solution « évidente » en observant attentivement l'équation, sans forcément chercher à utiliser la méthode de variation de la constante.*)

On considère l'équation différentielle :

$$(E_2) \ : \ y'' + 5y' + 6y = \frac{x-2}{x^3 e^{2x}} \quad \text{sur }]0, +\infty[.$$

18. Résoudre l'équation homogène (H_2) associée à l'équation (E_2).

Soit φ une fonction réelle définie sur $]0, +\infty[$, deux fois dérivable. On considère la fonction définie sur $]0, +\infty[$ telle que

$$\psi(x) = \varphi(x)\mathrm{e}^{2x}.$$

19. Montrer que φ est solution de (E_2) si et seulement si ψ' est solution de (E_1).
20. En déduire une solution particulière de (E_2).
21. Résoudre l'équation (E_2).