# DS 5 - Eléments de correction.

1. Données : $u_0 = 10$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$

On pose $H_n$ : $3 \leqslant u_n \leqslant 4$

Initialisation : $u_1 = \sqrt{u_0 + 6} = 4$

donc $3 \leqslant u_1 \leqslant 4$ donc $H_1$ est vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $H_n$ vraie et on montre $H_{n+1}$ : $3 \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

$$\begin{aligned}
3 \leqslant u_n \leqslant 4 &\Rightarrow 9 \leqslant u_n + 6 \leqslant 10 \\
&\Rightarrow \sqrt{9} \leqslant \sqrt{u_n + 6} \leqslant \sqrt{10} \\
&\Rightarrow 3 \leqslant u_{n+1} \leqslant \sqrt{10} \leqslant \sqrt{16} \\
&\Rightarrow 3 \leqslant u_{n+1} \leqslant 4
\end{aligned}$$

Donc $H_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $3 \leqslant u_n \leqslant 4$.

2. $(1+x^2)y' + 2xy = 1 + 3x^2$ (E)

$$\Leftrightarrow \quad y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{1+3x^2}{1+x^2}$$

$$a(x) = \frac{2x}{1+x^2} \xrightarrow{P} A(x) = \ln(|x^2+1|)$$

$$y_H(x) = Ce^{-A(x)} = Ce^{-\ln(x^2+1)} = C \times \frac{1}{1+x^2}$$

avec $C \in \mathbb{R}$

Solution particulière de (E)

$$y_P(x) = C(x) \times \frac{1}{1+x^2}$$

avec
$$\begin{aligned}
C'(x) &= b(x)\, e^{A(x)} \\
&= \frac{1+3x^2}{1+x^2} \times (1+x^2) \\
&= 1 + 3x^2
\end{aligned}$$

$C(x) = x + x^3$ convient.

$$y_P(x) = (x + x^3) \times \frac{1}{1+x^2}.$$

Conclusion : $y(x) = y_H(x) + y_P(x) = \dfrac{C + x + x^3}{1+x^2}$

avec $C$ à déterminer

Condition initiale : $y(0) = 1 \Leftrightarrow C = 1$.

D'où $\boxed{y(x) = \dfrac{1 + x + x^3}{1+x^2} \text{ sur } \mathbb{R}}$

3. Une solution particulière de $(E_1)$ est $\ln(x)$

En effet $[\ln(x)]' + \ln(x) = \ln(x) + \frac{1}{x}$ $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$

4. $y'' + 5y' + 6y = 0$ $(H_2)$.

Polynôme caractéristique associé :

$$P(x) = x^2 + 5x + 6.$$

$P$ admet deux racines : $r_1 = -3$ et $r_2 = -2$.

D'où $\boxed{y_{H_2}(x) = Ae^{-3x} + Be^{-2x} \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}}$

5. $f(x) = g(x)e^{-2x}$
$f'(x) = [g'(x) - 2g(x)]e^{-2x}$
$f''(x) = [g''(x) - 4g'(x) + 4g(x)]e^{-2x}$
$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$

$f(x)$ solution de $(E_2)$

ssi $f''(x) + 5f'(x) + 6f(x) = \dfrac{x\ln(x)+1}{xe^{2x}}$ $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$

ssi $[g''(x) - 4g'(x) + 4g(x) + 5g'(x) - 10g(x) + 6g(x)]\cancel{e^{-2x}} = \dfrac{x\ln(x)+1}{x} \times \cancel{e^{-2x}}$ $\forall x > 0$

ssi $g''(x) + g'(x) = \dfrac{x\ln(x)+1}{x}$ $\forall x > 0$

ssi $[g'(x)]' + g'(x) = \ln(x) + \frac{1}{x}$ $\forall x > 0$.

ssi $g'(x)$ est solution de $(E_1)$.

Ainsi : $\boxed{f \text{ solution de } (E_2) \text{ ssi } g' \text{ est solution de } (E_1)}$

6. Soit $g$ telle que $g'(x) = \ln(x)$ (Q3)
Par exemple $g(x) = x\ln(x) - x$
(par IPP)

On pose $g(x) = x\ln(x) - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$
Alors $g'(x)$ est solution de $(E_1)$
Donc $f(x) = g(x)e^{-2x}$ est solution de $(E_2)$
d'après (5)

Ainsi une solution particulière de $(E_2)$
est $\underline{f(x) = (x\ln(x) - x)e^{-2x}}$. (pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$)

7. Conclusion :

$$\mathcal{S}_{E_2} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto Ae^{-3x} + Be^{-2x} + (x\ln x - x)e^{-2x} \end{array} \right. ,\ A, B \in \mathbb{R} \Bigg\}$$

8. $Q_1 \cap Q_2$ ?

$$\begin{cases} \boxed{x} + 2y - z = -1 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{x} + 2y - z = -1 \\ -3y + 3z = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{x} + 2y - z = -1 \\ -y + \boxed{z} = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{x} + y = 0 \\ -y + \boxed{z} = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathcal{D} : \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}}$$

9. $\mathcal{P}_m : (1+m)x + (2-m)y + (-1+2m)z + (1-2m) = 0$.
équation cartésienne d'un plan de $\mathbb{R}^3$
orthogonal à $\overrightarrow{n_m}(1+m, 2-m, -1+2m)$.
non nul pour tout m réel.

10. Soit $M(x, y, z) \in \mathcal{D}$
Alors $M \in Q_1 \cap Q_2$ et donc $x + 2y - z + 1 = 0$
et $x - 2z - 2 = 0$

Donc $(x+2y-z+1)+m(x-y+2z-2)=0+m\times 0=0$

D'où $M\in \mathcal{P}_m$.

Conclusion : $\forall M\in \mathcal{D}$, on a $M\in \mathcal{P}_m$

d'où $\mathcal{D}\subset \mathcal{P}_m$.

11. $\mathcal{P}_m \perp Q_1 \iff \vec{n}_m \perp \vec{n}_{Q_1}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix}1+m\\2-m\\2m-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=0.$$

$$\iff (1+m)+2(2-m)-(2m-1)=0$$

$$\iff 6-3m=0$$

$$\iff m=2$$

Ccl : $Q_1 \perp \mathcal{P}_2$

12. $\mathcal{S}$ : $x^2+y^2+z^2+2x-4y+1=0$

$$\iff x^2+2x+1+y^2-4y+4+z^2=4.$$

$$\iff (x+1)^2+(y-2)^2+z^2=4.$$

$\mathcal{S}$ est la sphère de centre $\Omega(-1,2,0)$ et de rayon $r=2$.

13. $d_m = d(\Omega,\mathcal{P}_m)$

$$=\frac{|4-5m|}{\sqrt{(1+m)^2+(2-m)^2+(2m-1)^2}}$$

$$=\frac{|4-5m|}{\sqrt{6m^2-6m+6}}$$

14- $\mathcal{P}_m$ tangent à $\mathcal{S}$

ssi $d(\Omega,\mathcal{P}_m)=2$

ssi $\dfrac{|4-5m|}{\sqrt{6m^2-6m+6}}=2$

ssi $|4-5m|=2\sqrt{6m^2-6m+6}$

ssi $(4-5m)^2=4(6m^2-6m+6)$

ssi $16-40m+25m^2=24m^2-24m+24$.

ssi $m^2-16m-8=0$.

$\Delta=16^2+4\times 8=4\times 8\times 9.$ $\quad(\sqrt{\Delta}=4\times 3\times\sqrt{2}.)$
$=4\times 4\times 2\times 9$

$\left(m_1=\dfrac{16-12\sqrt{2}}{2} \quad m_2=\dfrac{16+12\sqrt{2}}{2}\right.$

$\left. m_1=8-6\sqrt{2} \quad m_2=8+6\sqrt{2}.\right)$ INUTILE ✱

15. $d_1=d(\Omega,\mathcal{P}_1)=\dfrac{|4-5|}{\sqrt{6}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}<2$

donc $\mathcal{P}_1\cap\mathcal{S}$ est le cercle de centre $H$ (projeté orthogonal de $\Omega$ sur $\mathcal{P}_1$) de rayon $\rho=\sqrt{r^2-d_1^2}=\sqrt{4-\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{23}{6}}$. inclus dans $\mathcal{P}_1$.

✱ $\Delta>0$, donc $m^2-16m-8=0$ admet deux solutions distinctes réelles

CCL : il existe 2 plans $(\mathcal{P}_{m_1},\mathcal{P}_{m_2})$ tangents à $\mathcal{S}$.