Devoir surveillé n°6 – Mathématiques – Durée : 1 heure
CALCULATRICE AUTORISÉE

Exercice 1. Géométrie élémentaire de l'espace

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère trois points :

$$A\,(2,1,1) \quad B\,(0,-1,1) \quad \text{et} \quad C\,(3,2,2)\,.$$

1. Les points A, B et C définissent-ils un plan ?
2. Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).
3. Déterminer une représentation cartésienne du plan (ABC).

Soient P le plan d'équation $x - y - 1 = 0$ et $D\left(1, -\frac{1}{2}, 0\right)$ un point.

4. Déterminer la distance du point D au plan P.

On note Δ la droite passant par D et perpendiculaire à P.

5. Déterminer un vecteur directeur de Δ.
6. Déterminer une représentation paramétrique de Δ.
7. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de D sur le plan P.
8. Retrouver le résultat de la question 4.

On note $\mathscr{A}$ l'ensemble d'équation cartésienne

$$\mathscr{A} \ : \ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y = \frac{11}{4}.$$

9. Préciser la nature géométrique de $\mathscr{A}$.
10. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection entre $\mathscr{A}$ et le plan P.

Exercice 2. Équations différentielles

On considère l'équation différentielle :

$$(E_1) \ : \ y' + y = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \quad \text{sur }]0, +\infty[.$$

11. Déterminer une solution particulière de l'équation (E_1).
(*On pourra essayer de chercher une solution « évidente » en observant attentivement l'équation*)
12. Résoudre (E_1).

On considère l'équation différentielle :

$$(E_2) \ : \ (1 + \mathrm{e}^x)\, y'' + (1 + 3\mathrm{e}^x)\, y' + 2\mathrm{e}^x y = \frac{x-1}{x^2} \quad \text{sur }]0, +\infty[.$$

Soit φ une fonction réelle définie sur $]0, +\infty[$, deux fois dérivable. On considère la fonction définie sur $]0, +\infty[$ telle que

$$\psi(x) = (1 + \mathrm{e}^x)\, \varphi(x).$$

13. Déterminer $\psi'(x)$ et $\psi''(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
14. Montrer que φ est solution de (E_2) si et seulement si ψ' est solution de (E_1).
15. En déduire l'ensemble des solutions de (E_2).