Devoir surveillé n°6 - Mathématiques

Durée : 2 heures - Calculatrice autorisée

Exercice 1. Division euclidienne de polynômes

Soient
$$A = X^4 + 2X^3 + X + 1 \quad \text{et} \quad B = X^2 - 2X + 2.$$

1. Effectuer la division euclidienne de A par B. On note Q le quotient et R le reste de cette division euclidienne.
2. Calculer $B(1+i)$.
3. En déduire $A(1+i)$.

Exercice 2. Puissances d'une matrice et suites imbriquées

On considère les matrices suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
5. Vérifier que $AP = PL$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $A^n = PL^nP^{-1}$.
7. On pose $J = L - I$. Calculer J^3.
8. En déduire, à l'aide de la formule du binome de Newton que, pour tout entier $n \geqslant 2$:
$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2.$$
9. Expliciter les neuf coefficients de la matrice L^n pour $n \geqslant 2$. Vérifier que cette expression est encore valable lorsque $n = 0$ et $n = 1$.
10. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère les trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) définie par : $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $w_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n \\ v_{n+1} = v_n + 2w_n \\ w_{n+1} = 2u_n + w_n \end{cases}.$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
12. En déduire, sans justifier, une expression de X_n en fonction de A, n et X_0.
13. Déterminer l'expression des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

Exercice 3. Suites récurrentes (CCINP TPC 2019)

Soit la fonction f définie par : pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \dfrac{3}{1+x^2}$.

14. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.
15. Montrer que :
$$f(x) = x \iff x^3 + x - 3 = 0.$$
16. Dresser le tableau de variations de la fonction $g(x) = x^3 + x - 3$ sur $\mathbb{R}^+$.
17. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$, noté α, que l'on ne cherchera pas à déterminer.
Vérifier que : $1 < \alpha < 2$.

On définit la fonction h sur $\mathbb{R}^+$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$h(x) = f \circ f(x) - x.$$

On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$h(x) = -\frac{\left(x^2 - 3x + 1\right)\left(x^3 + x - 3\right)}{\left(x^2+1\right)^2 + 9}.$$

18. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet exactement trois solutions distinctes : α, β et β' avec
$$0 < \beta < \alpha < \beta',$$
où α est le réel défini à la question 17.
19. Justifier que $1 + \beta^2 = 3\beta$.
20. Montrer que $f(\beta) = \dfrac{1}{\beta} = \beta'$.
On admettra de même que $f\left(\beta'\right) = \dfrac{1}{\beta'} = \beta$.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f\left(u_n\right) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

On définit (v_n) et (w_n) deux sous-suites de (u_n) : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = u_{2n} \quad \text{et} \quad w_n = u_{2n+1}.$$

21. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ et $w_{n+1} = f \circ f(w_n)$.
22. Montrer que $f \circ f$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
23. Montrer que pour tout $x \in [0, \beta]$, $f \circ f(x) \in [0, \beta]$.
24. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0, \beta]$.

Dans la suite du problème, on admet que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \in [\beta', 3]$,
- la suite (v_n) est croissante,
- la suite (w_n) est décroissante.

25. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et déterminer leurs limites respectives.
26. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?