Devoir surveillé n°6 - Mathématiques

Correction

Exercice 1. Division euclidienne de polynômes

Soient $A = X^4 + 2X^3 + X + 1 \quad \text{et} \quad B = X^2 - 2X + 2$.

1. Effectuer la division euclidienne de A par B. On note Q le quotient et R le reste de cette division euclidienne.
   Correction : $\boxed{A(X) = B(X)Q(X) + R(X) \text{ avec } Q(X) = X^2 + 4X + 6 \text{ et } R(X) = 5X - 11.}$
2. Calculer $B(1+i)$.
   Correction : $\boxed{B(1+i) = 0}$
3. En déduire $A(1+i)$.
   Correction :
   On a $A(1+i) = B(1+i)Q(1+i) + R(1+i) = R(1+i) = 5(1+i) - 11 = -6 + 5i$.
   Conclusion : $\boxed{A(1+i) = -6 + 5i}$

Exercice 2. Puissances d'une matrice et suites imbriquées

On considère les matrices suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   Correction : $\det P = 1 \neq 0$ donc P est inversible et $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.
5. Vérifier que $AP = PL$.
   Correction : $AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $PL = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, donc $\boxed{AP = PL.}$
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $A^n = PL^nP^{-1}$.
   Correction : On procède par récurrence.
   Initialisation : $AP = PL$, donc $APP^{-1} = PLP^{-1}$, donc $A = PLP^{-1}$ (la propriété est vérifiée lorsque $n = 1$).

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $A^n = PL^nP^{-1}$.
Alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= PL^nP^{-1}PLP^{-1} \\ &= PL^nLP^{-1} \\ &= PL^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $A^n = PL^nP^{-1}$.

7. On pose $J = L - I$. Calculer J^3.

Correction : $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J^2 = J \times J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\boxed{J^3 = J^2 \times J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$. Ainsi pour tout $n \geqslant 3$, $J^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8. En déduire, à l'aide de la formule du binome de Newton que, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2.$$

Correction : $L = J + I$. Comme $IJ = J = JI$, on a

$$\begin{aligned} L^n &= (J+I)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k I^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k && \text{or } J^k = 0 \text{ pour } k \geqslant 3 \\ &= \binom{n}{0} J^0 + \binom{n}{1} J^1 + \binom{n}{2} J^2 && \text{lorsque } n \geqslant 2 \\ &= I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2. \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout entier } n \geqslant 2,\ L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2.}$

9. Expliciter les neuf coefficients de la matrice L^n pour $n \geqslant 2$. Vérifier que cette expression est encore valable lorsque $n = 0$ et $n = 1$.

Correction : Pour $n \geqslant 2$, on a

$$L^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$L^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérification pour $n=0$: $\begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = L^0$ donc l'égalité est vérifiée pour $n=0$.

Vérification pour $n=1$: $\begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L = L^1$, donc l'égalité est vérifiée pour $n=1$.

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ L^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$

10. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction : Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\begin{aligned} A^n &= PL^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vérification en $n=0$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = A^0$. L'égalité est encore valable en $n=0$.

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$

On considère les trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) définie par : $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $w_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n \\ v_{n+1} = v_n + 2w_n \\ w_{n+1} = 2u_n + w_n \end{cases}.$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

Correction : $AX_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n + 2w_n \\ 2u_n + w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$.

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n.}$

12. En déduire, sans justifier, une expression de X_n en fonction de A, n et X_0.

    Correction : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0.}$

13. Déterminer l'expression des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

    Correction : Ainsi

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2n(n-1) + 4n \\ 2n + 2 \end{pmatrix}.$$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 1,\ v_n = 2n^2 + 2n \text{ et } w_n = 2n + 2.}$

Exercice 3. Suites récurrentes (CCINP TPC 2019)

Soit la fonction f définie par : pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \dfrac{3}{1+x^2}$.

14. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.

    Correction : f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ (quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas) et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = -\dfrac{6x}{(1+x^2)^2}$.

    $f'(x) = 0 \iff x = 0$

    Variations de f : $\boxed{f : \mathbb{R}^+ \to]0,3] \text{ est strictement décroissante.}}$

15. Montrer que :

$$f(x) = x \iff x^3 + x - 3 = 0.$$

    Correction :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{3}{1+x^2} = x \\ &\iff 3 = x(1+x^2) \\ &\iff 0 = x^3 + x - 3. \end{aligned}$$

16. Dresser le tableau de variations de la fonction $g(x) = x^3 + x - 3$ sur $\mathbb{R}^+$.

    Correction : g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ (fonction polynomiale) et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$.

    Variations de g : La fonction $g : \mathbb{R}^+ \to [-3, +\infty[$ est strictement croissante.

17. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$, noté α, que l'on ne cherchera pas à déterminer. Vérifier que : $1 < \alpha < 2$.

    Correction : La fonction $g : \mathbb{R}^+ \to [-3, +\infty[$ est continue et strictement croissante, donc bijective (théorème de la bijection). Comme $0 \in [-3, +\infty[$, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $g(\alpha) = 0$. De plus

$$f(x) = x \iff g(x) = 0 \iff x = \alpha.$$

    α est donc l'unique solution à l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}^+$.

    De plus $g(1) = -1 < 0$ et $g(2) = 7 > 0$, donc $1 < \alpha < 2$.

On définit la fonction h sur $\mathbb{R}^+$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$h(x) = f \circ f(x) - x.$$

On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$h(x) = -\frac{\left(x^2 - 3x + 1\right)\left(x^3 + x - 3\right)}{\left(x^2+1\right)^2 + 9}.$$

18. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet exactement trois solutions distinctes : α, β et β' avec

$$0 < \beta < \alpha < \beta',$$

où α est le réel défini à la question 17.

Correction :

$$\begin{aligned} h(x) = 0 &\iff \left(x^2 - 3x + 1\right)\left(x^3 + x - 3\right) = 0 \\ &\iff x^2 - 3x + 1 = 0 \text{ ou } x^3 + x - 3 = 0 \\ &\iff x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \alpha. \end{aligned}$$

On note $\beta = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$ et $\beta' = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$.
Par application numérique, on a bien

$$0 < \beta < \alpha < \beta'.$$

19. Justifier que $1 + \beta^2 = 3\beta$.

Correction : β est une solution de $x^2 - 3x + 1 = 0$, donc $\beta^2 - 3\beta + 1 = 0$, donc $\boxed{1 + \beta^2 = 3\beta.}$

20. Montrer que $f(\beta) = \dfrac{1}{\beta} = \beta'$.

On admettra de même que $f\left(\beta'\right) = \dfrac{1}{\beta'} = \beta$.

Correction :

$$\begin{aligned} f(\beta) &= \frac{3}{1+\beta^2} \\ &= \frac{3}{3\beta} \\ &= \frac{1}{\beta} \\ &= \frac{2}{3 - \sqrt{5}} \\ &= \frac{2}{3 - \sqrt{5}} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \\ &= \frac{2\left(3 + \sqrt{5}\right)}{3^2 - \sqrt{5}^2} \\ &= \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ &= \beta'. \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{f(\beta)=\dfrac{1}{\beta}=\beta'.}$

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f\left(u_n\right) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

On définit (v_n) et (w_n) deux sous-suites de (u_n) : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = u_{2n} \quad \text{et} \quad w_n = u_{2n+1}.$$

21. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ et $w_{n+1} = f \circ f(w_n)$.
    Correction : $v_{n+1} = u_{2(n+1)} = u_{2n+2}$ et $f \circ f(v_n) = f(f(u_{2n})) = f(u_{2n+1}) = u_{2n+2}$ donc $\boxed{v_{n+1} = f \circ f(v_n).}$
    De même, $w_{n+1} = u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3}$ et $f \circ f(w_n) = f(f(u_{2n+1})) = f(u_{2n+2}) = u_{2n+3}$ donc $\boxed{w_{n+1} = f \circ f(w_n).}$
22. Montrer que $f \circ f$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
    Correction : Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$

    $$\begin{aligned} x_1 \leqslant x_2 &\Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2) \geqslant 0 && \text{car } f \text{ est décroissante et à valeurs dans } \mathbb{R}^+ \\ &\Longrightarrow f\left(f(x_1)\right) \leqslant f\left(f(x_2)\right) && \text{car } f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

    On a montré que pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, $x_1 \leqslant x_2 \Longrightarrow f \circ f(x_1) \leqslant f \circ f(x_2)$.
    La fonction $f \circ f$ est donc croissante sur $\mathbb{R}^+$.
23. Montrer que pour tout $x \in [0, \beta]$, $f \circ f(x) \in [0, \beta]$.
    Correction : Par croissance de $f \circ f$ de $\mathbb{R}^+$, on a

    $$0 \leqslant x \leqslant \beta \Longrightarrow f \circ f(0) \leqslant f \circ f(x) \leqslant f \circ f(\beta).$$

    De plus $f \circ f(0) = f(f(0)) = f(3) = \dfrac{3}{10}$ et $f \circ f(\beta) = f(f(\beta)) = f(\beta') = \beta$ d'après Q20. Ainsi

    $$0 \leqslant x \leqslant \beta \Longrightarrow 0 \leqslant \frac{3}{10} \leqslant f \circ f(x) \leqslant \beta.$$

    Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } x \in [0, \beta],\ f \circ f(x) \in [0, \beta].}$
24. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [0, \beta]$.
    Correction : On procède par récurrence.
    $v_0 = u_0 = 0$ donc $v_0 \in [0, \beta]$.
    Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_n \in [0, \beta]$. Alors $f \circ f(v_n) \in [0, \beta]$ d'après Q22, et donc $v_{n+1} \in [0, \beta]$ d'après Q21.
    Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n \in [0, \beta].}$

Dans la suite du problème, on admet que :

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \in [\beta', 3]$,

— la suite (v_n) est croissante,

— la suite (w_n) est décroissante.

25. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et déterminer leurs limites respectives.
    Correction : La suite (v_n) est croissante et majorée par β, donc converge vers ℓ d'après le théorème de la limité monotone.

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$. Par passage à la limite, on a $\ell = f \circ f(\ell)$, donc $f \circ f(\ell) - \ell = 0$, c'est-à-dire $h(\ell) = 0$, donc $\ell \in \{\beta, \alpha, \beta'\}$. De plus $v_n \in [0, \beta]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\ell \in [0, \beta]$, d'où $\ell = \beta$.
La suite (w_n) est décroissante et minorée par β', donc converge vers ℓ'. On montre de manière similaire que $\ell' = \beta'$.
Conclusion : $\lim v_n = \beta$ et $\lim w_n = \beta'$.

26. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?
Correction : Si (u_n) admet une limite, alors toutes ses sous-suites convergent vers la même limite. Or (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers deux limites distinctes : β et β'. Donc (u_n) n'admet pas de la limite et la suite (u_n) n'est pas convergente.