ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois problèmes indépendants.

Problème I

On considère dans ce problème la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par un premier terme u_0 dans $]0,1[$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 1}.$$

On introduit la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$.

1. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$.
2. En déduire que f est bien définie sur $\mathbf{R}$.
3. Déduire de la question 1 que, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \in [0,1]$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in [0,1]$.
5. Justifier que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et, pour tout $x \in \mathbf{R}$, calculer $f'(x)$.

   On détaillera les calculs effectués.
6. Déterminer le tableau des variations de f sur $[0,1]$.
7. Montrer que, pour $x \in [0,1]$, $f(x) \geq x$.

8. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $\left|f'(x)\right| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

   On admet que $\forall n \in \mathbf{N},\ |1 - u_{n+1}| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}|1 - u_n|$.
9. En déduire alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, une majoration de $|1 - u_n|$ en fonction de n et de $|1 - u_0|$.
10. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Fin du premier problème

Problème 2

Sur la plage, les drapeaux hissés près des postes de secours avertissent des conditions de baignade liées à l'état de la mer et à la météo.
Les significations des couleurs de drapeaux sont les suivantes :

- drapeau vert : la baignade est surveillée et ne présente pas de danger apparent ;
- drapeau jaune : la baignade est surveillée avec danger limité ou marqué ;
- drapeau rouge : la baignade est interdite.

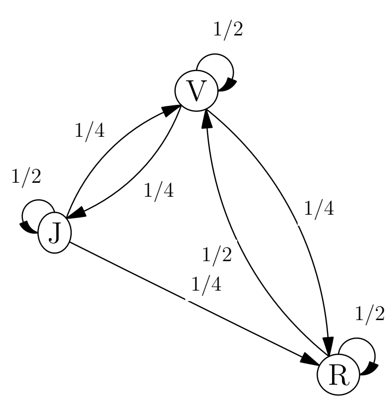
La couleur d'un drapeau est déterminée par de nombreux facteurs tels que la météo, l'état de la mer ou la présence de sauveteurs pour assurer la sécurité des baigneurs.
Dans cet exercice, on considère que la couleur d'un drapeau est fixée quotidiennement et on modélise le changement de couleur selon les règles simplifiées suivantes :

- si le drapeau est vert un jour, le lendemain il peut être vert avec une probabilité $\frac{1}{2}$, jaune avec une probabilité $\frac{1}{4}$ et rouge sinon ;
- si le drapeau est jaune un jour, le lendemain il peut être vert avec une probabilité $\frac{1}{4}$, jaune avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et rouge sinon ;
- si le drapeau est rouge un jour, le lendemain il peut être vert avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et rouge sinon. Un drapeau rouge ne peut donc pas passer à l'état jaune le jour suivant.

On note :

- V_n l'évènement " le drapeau est vert le n^e jour " et $v_n = P(V_n)$;
- J_n l'évènement " le drapeau est orange le n^e jour " et $j_n = P(J_n)$;
- R_n l'évènement " le drapeau est rouge le n^e jour " et $r_n = P(R_n)$.

La situation est résumée sur la **figure suivante** :



On suppose que le drapeau est vert le jour numéro 0.

11. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'un système complet d'événements à préciser, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n, de j_n et de r_n.
12. Donner de même des expressions de j_{n+1} et de r_{n+1} en fonction de v_n, de j_n et de r_n (sans justification).

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ j_n \\ r_n \end{pmatrix}$.

13. Préciser X_0.
14. Justifier que $X_{n+1} = AX_n$ avec :

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

15. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner (sans justification) une expression de X_n en fonction de n, de A et de X_0.

Soit P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = X^3 - \frac{3}{16}X - \frac{1}{32}$.

16. Montrer que $\alpha = \frac{1}{2}$ est une racine simple de P et que $\beta = -\frac{1}{4}$ est une racine double de P.

On définit

$$\chi(x) = \det(xI_3 - A) \quad \text{où} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

17. Expliciter les 9 coefficients de la matrice $xI_3 - A$.
18. Montrer que $\chi(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{16}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{32} = P\left(x - \frac{1}{2}\right)$ en citant la formule utilisée.
19. En déduire les racines de $\chi(x)$. On utilisera le résultat de la question 16.

On note

$$E_\lambda = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}.$$

20. Résoudre l'équation $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

    En déduire une base et la dimension de $E_{\frac{1}{4}}$.

21. De même, déterminer une base et la dimension de E_1.
22. A-t-on $E_1 \oplus E_{\frac{1}{4}} = \mathbb{R}^3$?

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique $\mathscr{B}$.

23. Déterminer l'expression de $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

On définit la famille $\mathscr{C} = (u, v, w)$ où $u = (4, 2, 3)$, $v = (1, -1, 0)$ et $w = (-3, 0, 3)$.

24. Montrer que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
25. On note T la matrice de f dans la base $\mathscr{C}$. En utilisant la définition de T, justifier que

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

On note Q la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$.

26. Déterminer Q et calculer Q^{-1}.
27. En utilisant le binôme de Newton sur une expression du type $D + N$ où D et N sont deux matrices bien choisies, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} & \frac{3n}{4^n} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^n} \end{pmatrix}.$$

    Vérifier que cette expression est encore vérifiée pour $n = 0$.
28. À l'aide de la formule du changement de bases, établir une relation entre les matrices T, A, Q et Q^{-1}.
29. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = QT^nQ^{-1}$.
30. On note T^∞ (respectivement A^∞) la matrice dont les coefficients sont les 9 limites obtenues en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'expression de la matrice T^n (respectivement A^n). Déterminer T^∞, puis en déduire A^∞.
31. Au bout d'un grand nombre de jours, quelle est la couleur la plus probable pour le drapeau ?

Fin du second problème

Troisième problème

Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0, \\ f(0) = 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

32. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
33. Calculer $f\left(\dfrac{1}{X}\right)$ pour tout $X > 0$. En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.
La fonction f est-elle continue en 0 ?
34. Rappeler la formule de la dérivée d'un produit de fonctions $u(x) \times v(x)$, celle de la dérivée d'un quotient $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ et celle de la dérivée de la composée $\mathrm{e}^{u(x)}$.
35. Montrer que pour tout $x > 0$,
$$f'(x) = \frac{1 - 2x}{x^4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}.$$

Calcul d'aires

36. Soit $h \in]0, 1[$. On note $\mathscr{A}(h) = \displaystyle\int_h^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Déterminer $\mathscr{A}(h)$.
37. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f. Déterminer l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$, la droite d'équation $x = 1$ et l'axe des ordonnées, c'est-à-dire déterminer $\lim\limits_{h \to 0^+} \mathscr{A}(h)$.

Résolution d'une équation différentielle

38. Résoudre l'équation différentielle $(E) \quad x^2y' + (2x - 1)y = 0$ sur $]0, +\infty[$.

Dérivées successives et polynômes associés

On définit une famille de polynômes $P_n(X)$ de $\mathbb{R}[X]$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} P_0(X) = 1, \\ P_{n+1}(X) = X^2 P_n'(X) + [1 - 2(n+1)X]\, P_n(X) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}. \quad (\star) \end{cases}$$

39. Calculer $P_1(X)$ et $P_2(X)$.
40. On note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de la fonction f. À l'aide d'une récurrence, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}.$$

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ telle que $g(x) = x^2 f(x)$.

41. Montrer que $g^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
42. Rappeler la formule de Leibniz relative à la dérivée n-ième d'un produit de fonctions.
43. En utilisant la formule de Leibniz pour calculer $g^{(n)}(x)$, démontrer que :
$$g^{(n)}(x) = x^2 f^{(n)}(x) + 2nx f^{(n-1)}(x) + n(n-1) f^{(n-2)}(x) \quad \text{pour } n \geqslant 2.$$
44. En déduire que
$$P_{n+1}(x) = (1 - 2(n+1)x)\, P_n(x) - n(n+1)x^2 P_{n-1}(x) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^\star,$$
puis que
$$P_n'(x) = -n(n+1) P_{n-1}(x) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^\star.$$
45. En dérivant la relation $(\star)$, montrer que
$$x^2 P_n''(x) + (1 - 2nx) P_n'(x) + n(n+1) P_n(x) = 0 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Fin du troisième problème

Fin de l'énoncé