Problème 1

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=x^2-x+1$.
2. $f : x \mapsto \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$ est définie sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \geqslant 0$.
3. Soit $x \in [0,1]$. On a

$$\begin{aligned}
0 \leqslant x \leqslant 1 &\Longrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant x-\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2} \\
&\Longrightarrow 0 \leqslant \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4} \\
&\Longrightarrow \frac{3}{4} \leqslant \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \leqslant 1 \\
&\Longrightarrow \sqrt{\frac{3}{4}} \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{1} && \text{par croissance de } x \mapsto \sqrt{x} \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\
&\Longrightarrow 0 \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1.
\end{aligned}$$

   Conclusion : Pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \in [0,1]$.

4. On procède par récurrence. On pose $\mathscr{H}_n : u_n \in [0,1]$
   Initialisation : $u_0 \in]0,1[$ par définition donc $\mathscr{H}_0$ est vérifiée.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{H}_n$ est vérifiée : $u_n \in [0,1]$
   On a par définition $u_{n+1} = f(u_n)$, or $u_n \in [0,1]$, donc $f(u_n) \in [0,1]$ d'après le résultat de la question, donc $u_{n+1} \in [0,1]$ et $\mathscr{H}_{n+1}$ est vérifiée.
   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.
5. La fonction $x \mapsto x^2-x+1$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ (d'après la question 1). La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. On en déduit que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2-x+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}.$$
6. Soit $x \in [0,1]$. Montrons par équivalence le résultat souhaité.

$$\begin{aligned}
f(x) \geqslant x &\iff \sqrt{x^2-x+1} \geqslant x \\
&\iff x^2-x+1 \geqslant x^2 && \text{par croissance de } x \mapsto x^2 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \\
&\iff 1 \geqslant x
\end{aligned}$$

   or $1 \geqslant x$ car $x \in [0,1]$ et donc
$$f(x) \geqslant x \quad \forall x \in [0,1].$$

7. $f'(x)$ est du signe de $2x-1$ sur $[0,1]$. On en déduit que f est décroissante sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$. Tableau à compléter avec les valeurs $f(0)=1$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $f(1)=1$.
8. Pour tout $x\in[0,1]$, $|f'(x)|=\frac{|2x-1|}{2f(x)}$, or, d'après Q7,

$$\frac{1}{2f(x)}\leqslant\frac{1}{2\frac{\sqrt{3}}{2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}\quad\text{et}\quad|2x-1|\leqslant 1$$

   On en déduit par produit, que pour tout $x\in[0,1]$, $|f'(x)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}$.
9. On a $|1-u_n|\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n|1-u_0|$ pour tout $n\in[0,1]$.
10. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant 1-u_n\leqslant\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n(1-u_0)$, et donc

$$1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n(1-u_0)\leqslant u_n\leqslant 1.$$

   On conclut, par encadrement que la suite (u_n) converge et que $\lim u_n=1$.

Problème 2

11. (V_n,J_n,R_n) constitue un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}v_{n+1}=P(V_{n+1})&=P\left(V_n\cap V_{n+1}\right)+P\left(J_n\cap V_{n+1}\right)+P\left(R_n\cap V_{n+1}\right)\\&=P(V_n)P_{V_n}(V_{n+1})+P(J_n)P_{J_n}(V_{n+1})+P(R_n)P_{R_n}(V_{n+1})\\&=v_n\times\frac{1}{2}+j_n\times\frac{1}{4}+r_n\times\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

   Ainsi, $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n+\frac{1}{4}j_n+\frac{1}{2}r_n$.
12. De manière similaire, on a

$$\begin{cases}j_{n+1}=\frac{1}{4}v_n+\frac{1}{2}j_n,\\ r_{n+1}=\frac{1}{4}v_n+\frac{1}{4}j_n+\frac{1}{2}r_n.\end{cases}$$

13. $X_0=\begin{pmatrix}v_0\\j_0\\r_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ car le drapeau est vert le jour numéro 0.

14. $AX_n = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_n \\ j_n \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}v_n + \dfrac{1}{4}j_n + \dfrac{1}{2}r_n \\ \dfrac{1}{4}v_n + \dfrac{1}{2}j_n \\ \dfrac{1}{4}v_n + \dfrac{1}{4}j_n + \dfrac{1}{2}r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{n+1} \\ j_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$

15. Pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

16. On vérifie que $\begin{cases} P(\alpha) = 0 \\ P'(\alpha) \neq 0 \end{cases}$ et que $\begin{cases} P(\beta) = P'(\beta) = 0 \\ P''(\beta) \neq 0 \end{cases}$.

17. $xI_3 - A = \begin{pmatrix} (x-1/2) & -1/4 & -1/2 \\ -1/4 & (x-1/2) & 0 \\ -1/4 & -1/4 & (x-1/2) \end{pmatrix}.$

18. En appliquant la règle de Sarrus, on a

$$\begin{aligned} \chi(x) &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 + 0 - \frac{1}{32} - \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{2}\right) - 0 - \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{12}\right) \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{16}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{32} = P\left(x - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

19. On a, d'après la question 16,

$$\begin{aligned} \chi(x) = 0 &\iff P\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \\ &\iff x - \frac{1}{2} = \alpha \text{ ou } x - \frac{1}{2} = \beta \\ &\iff x = 1 \text{ ou } x = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Les racines de $\chi(x)$ sont 1 et $\dfrac{1}{4}$.

20. Après résolution du système $AX = \frac{1}{4}X$, on a $E_{\frac{1}{4}} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Une base de $E_{\frac{1}{4}}$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\dim\left(E_{\frac{1}{4}}\right) = 1$.

21. Après résolution du système $AX = X$, on a $E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$. Une base de E_1 est $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\dim(E_1) = 1$.

22. $E_1 + E_{\frac{1}{4}} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \neq \mathbb{R}^3$ donc E_1 et $E_{\frac{1}{4}}$ ne sont pas des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

23. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z, \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z\right)$.

24. $\det_{\mathscr{B}}(u, v, w) = -27 \neq 0$ donc (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

25. On a $f(u) = (4, 2, 3) = u$, $f(v) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0\right) = \frac{1}{4}v$ et $f(w) = (0, -\frac{3}{4}, \frac{3}{4}) = \frac{3}{4}v + \frac{1}{4}w$. D'où l'expression de T en revenant à sa définition.

26. $Q = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -7 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

27. $T = D + N$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On constate que $N^2 = 0$.

Comme $DN = ND$, on a

$$\begin{aligned} T^n &= (N + D)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} N^0 D^n + \binom{n}{1} N^1 D^{n-1} && \text{pour } n \geqslant 1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4^n & 0 \\ 0 & 0 & 1/4^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1/4^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4^n & 3n/4^n \\ 0 & 0 & 1/4^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La formule étant vérifiée en $n = 0$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4^n & 3n/4^n \\ 0 & 0 & 1/4^n \end{pmatrix}.$$

28. D'après la formule de changement de bases, on a $T = Q^{-1}AQ$.

29. Démonstration par récurrence (cf corrigé DM8).

30. Par passage à la limite dans l'expression de T^n, on a $T^\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Puis $A^\infty = QT^\infty Q^{-1} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -7 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

31. On a $\begin{pmatrix} v_n \\ j_n \\ r_n \end{pmatrix} = A^n X_0$ pour $n \in \mathbb{N}$. On note $v_\infty = \lim v_n$, $j_\infty = \lim j_n$ et $r_\infty = \lim r_n$. Par passage à la limite, on a donc $\begin{pmatrix} v_\infty \\ j_\infty \\ r_\infty \end{pmatrix} = A^\infty \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/9 \\ 2/9 \\ 3/9 \end{pmatrix}$.
Au bout d'un grand nombre de jour, la couleur la plus probable du drapeau est le vert.

Problème 3

32. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

33. $f\left(\frac{1}{X}\right) = X^2 \mathrm{e}^{-X}$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} f\left(\dfrac{1}{X}\right) = 0$ par croissances comparées. La fonction f est continue en 0 car $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$.

34. $[u \times v]' = u'v + uv'$, $\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ et $[\mathrm{e}^u]' = u'\mathrm{e}^u$.

35. $f'(x) = \left[\frac{1}{x^2}\right]' \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \times \left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right]' = \frac{-2x}{x^4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \frac{1-2x}{x^4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

36. $\mathscr{A}(h) = \int_h^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right]_h^1 = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{h}}$.

37. L'aire recherchée vaut $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ ua.

38. On normalise l'équation différentielle $(E) : y' + \dfrac{2x-1}{x^2} y = 0$.
On pose $a(x) = \dfrac{2x-1}{x^2} = 2\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$. Une primitive de $a(x)$ est $A(x) = 2\ln(|x|) + \dfrac{1}{x}$.
Les solutions de (E) sont de la forme $y(x) = C\mathrm{e}^{-A(x)} = Cf(x)$ où $C \in \mathbb{R}$.

39. $P_1(X) = 1 - 2X$ et $P_2(X) = 1 - 6X + 6X^2$.

40. $\mathscr{H}_n : f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n+2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$
$f^{(0)}(x) = f(x) = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \dfrac{P_0(x)}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ donc $\mathscr{H}_0$ est vérifiée.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{H}_n$ vérifiée.

Alors

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \left[f^{(n)}(x)\right]' \\
&= \left[\frac{P_n(x)}{x^{2n+2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right]' \\
&= \left[\frac{P_n(x)}{x^{2n+2}}\right]'\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} + \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}}\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right]' \\
&= \frac{P_n'(x)x^{2n+2} - (2n+2)P_n(x)x^{2n+1}}{\left(x^{2n+2}\right)^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} + \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} \times \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \\
&= \left[\frac{P_n'(x)}{x^{2n+2}} - \frac{2(n+1)P_n(x)}{x^{2n+3}} + \frac{P_n(x)}{x^{2n+4}}\right]\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \\
&= \frac{x^2P_n'(x) + (1-2(n+1)x)P_n(x)}{x^{2n+4}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \\
&= \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2n+4}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

donc $\mathscr{H}_{n+1}$ est vérifiée.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}.$$

41. On procède par récurrence. On note $\mathscr{G}_n : g^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x)$.
$g^{(1)}(x) = g'(x) = [x^2 f(x)]' = \left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right]' = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = f(x) = f^{(0)}(x)$ donc $\mathscr{G}_0$ est vérifiée.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{G}_n$ vérifiée. Alors

$$\begin{aligned}
g^{(n+2)}(x) &= \left[g^{(n+1)}(x)\right]' \\
&= \left[f^{(n)}(x)\right]' && \text{d'après } \mathscr{G}_n \\
&= f^{(n+1)}(x)
\end{aligned}$$

donc $\mathscr{G}_{n+1}$ est vraie.
Conclusion : $g^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

42. Formule de Leibniz : Si u et v sont des fonctions n fois dérivables, alors

$$[u \times v]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

43. On a

$$\begin{aligned}
g^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[x^2\right]^{(k)} f^{(n-k)}(x) \\
&= \binom{n}{0} x^2 f^{(n)}(x) + \binom{n}{1} 2x f^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} 2 f^{(n-2)}(x) \qquad \text{pour } n \geqslant 2 \\
&= x^2 f^{(n)}(x) + 2nx f^{(n-1)}(x) + n(n-1) f^{(n-2)}(x).
\end{aligned}$$

44. En remplaçant n par $n+1$ dans l'égalité précédente, on obtient

$$g^{(n+1)}(x) = x^2 f^{(n+1)}(x) + 2(n+1)x f^{(n)}(x) + n(n+1) f^{(n-1)}(x) \quad \text{pour } n \geqslant 1$$

donc, d'après Q41,

$$f^{(n)}(x) = x^2 f^{(n+1)}(x) + 2(n+1)x f^{(n)}(x) + n(n+1) f^{(n-1)}(x)$$

donc

$$x^2 f^{(n+1)}(x) = (1 - 2(n+1)x) f^{(n)}(x) - n(n+1) f^{(n-1)}(x)$$

donc, d'après Q40,

$$x^2 \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2n+4}} = (1 - 2(n+1)x) \frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} - n(n+1) \frac{P_{n-1}(x)}{x^{2n}}.$$

On obtient la relation souhaitée en multipliant cette égalité par x^{2n+2} :

$$P_{n+1}(x) = (1 - 2(n+1)x)\, P_n(x) - n(n+1)x^2 P_{n-1}(x) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^\star.$$

En utilisant ($\star$), on obtient

$$x^2 P_n'(X) + [1 - 2(n+1)x]\, P_n(x) = (1 - 2(n+1)x)\, P_n(x) - n(n+1)x^2 P_{n-1}(x),$$

d'où

$$P_n'(x) = -n(n+1) P_{n-1}(x) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^\star.$$

45. En dérivant la relation ($\star$), on obtient

$$P_{n+1}'(x) = 2x P_n'(x) + x^2 P_n''(x) - 2(n+1) P_n(x) + (1 - 2(n+1)x) P_n'(x)$$

donc, d'après Q44, on a

$$-(n+1)(n+2) P_n(x) = x^2 P_n''(x) + (1 - 2nx) P_n'(x) - 2(n+1) P_n(x)$$

et finalement

$$x^2 P_n''(x) + (1 - 2nx) P_n'(x) + n(n+1) P_n(x) = 0 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$