Devoir surveillé n°8 - Mathématiques

Durée : 2 heures - Calculatrice interdite

Exercice 1 : Fonctions trigonométriques hyperboliques

On définit les fonctions trigonométriques hyperboliques cosh et sinh sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Partie A – Étude de fonctions

1. Étudier la parité des fonctions cosh et sinh.
2. Montrer que les fonctions cosh et sinh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\cosh'(t) = \sinh(t)$ et $\sinh'(t) = \cosh(t)$.
3. Dériver la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = (\cosh(t))^2 - (\sinh(t))^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire une relation entre $(\cosh(t))^2$ et $(\sinh(t))^2$.
4. Tracer les tableaux de variations des fonctions cosh et sinh. On précisera les limites en $-\infty$ et $+\infty$. On y fera apparaître les valeurs de cosh et de sinh en 0.
5. Montrer que l'équation $\sinh(t) = 1$ d'inconnue t admet une unique solution réelle que l'on notera dans la suite α.
6. On pose $z = e^\alpha$. Montrer que $z^2 - 2z - 1 = 0$.
7. En déduire la valeur exacte de α.
8. Montrer que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$
9. Montrer que $\cosh(\alpha) = \sqrt{2}$.

Partie B – Suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale

$$I_n = \int_0^\alpha (\sinh t)^{2n} \mathrm{d}t.$$

10. Déterminer I_0.
11. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive.
    Que peut-on en déduire ?
12. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+1} = \cosh\alpha - (2n+1)(I_{n+1} + I_n).$$

13. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) I_n.$$

14. Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Partie C – Algorithmique

15. On souhaite obtenir un encadrement du réel α, solution de l'équation $\sinh(\alpha)-1=0$, en appliquant un procédé de dichotomie. Recopier en la complétant la fonction *Python* suivante, qui prend en argument un réel strictement positif $\varepsilon>0$, et renvoie une liste de deux réels a et b vérifiant $a \leqslant \alpha \leqslant b$ et $b-a<\varepsilon$.

```
from math import sinh

def dicho(eps):
    a=...
    b=...
    while ...... :
        c=float(a+b)/2
        if ............. :
            a=c
        else :
            b=c
    return [a,b]
```

Exercice 2 : Calcul d'intégrales par changement de variable

Partie A

16. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer

$$I=\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

17. En posant $x=\sqrt{t}$, déterminer

$$J=\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Partie B

18. En posant $x=1+\mathrm{e}^t$, déterminer

$$K=\int_0^1 \frac{1}{(1+\mathrm{e}^t)\,(1+\mathrm{e}^{-t})}\,\mathrm{d}t.$$

Partie C

Questions préliminaires On pose $f(x)=\arctan(x)+\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

19. Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f.
20. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en $x=0$?
21. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^\star$.
22. En déduire que pour tout $x>0$, $\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}-\arctan(x)$.

Calcul d'intégrales Soit $a>0$. On note

$$I_a=\int_{1/2}^2 \frac{1}{(1+t^2)\,(1+t^a)}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_a=\int_{1/2}^2 \frac{t^a}{(1+t^2)\,(1+t^a)}\,\mathrm{d}t.$$

23. Calculer I_a+J_a.
24. En posant $x=\dfrac{1}{t}$, montrer que $I_a=J_a$.
25. En déduire que $I_a=\arctan(2)-\dfrac{\pi}{4}$.