CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois problèmes indépendants.

Problème 1 : Différentes méthodes de calcul des puissances d'une matrice

Tout au long de ce problème, M désigne la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels définie par :

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

et I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3, c'est-à-dire : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Une première méthode pour le calcul des puissances de M

Considérons la matrice A définie par : $A = \dfrac{1}{4}(M - I_3)$.

1. Calculer A, puis A^2.
2. Exprimer la matrice M en fonction de la matrice A.
3. Montrer que, pour tout entier n appartenant à $\{0, 1, 2\}$, il existe un réel u_n tel que : $M^n = I_3 + u_n A$.
4. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, il existe un réel u_n tel que : $M^n = I_3 + u_n A$.
   La preuve mettra en avant la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -3u_n + 4$.

Considérons la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$.

5. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
6. En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de v_n en fonction de n.
7. En déduire alors, pour tout entier naturel n, une expression de u_n en fonction de n.
8. Pour tout entier naturel n, en déduire une écriture matricielle de M^n ne faisant intervenir que l'entier n.

Une seconde méthode de calcul des puissances de M

9. Montrer qu'il existe une unique matrice J appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M = 4J - 3I_3$. Expliciter les 9 coefficients de cette matrice J.
10. Calculer J^2, puis J^n pour tout entier naturel non nul n.
11. Énoncer la formule du binôme de Newton.
12. Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $M^n = (-3)^n I_3 + \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} \right) J$.
13. Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-3)^{n-k} \right) = 1 - (-3)^n$.
14. En déduire une expression de M^n en fonction de n, I_3 et J, puis expliciter les 9 coefficients de la matrice M^n pour tout n entier naturel non nul.
15. Expliciter les 9 coefficients de la matrice M^n pour tout n entier naturel.

Une dernière méthode de calcul des puissances de M

Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $\mathcal{E} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ et introduisons alors l'endomorphiqme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base $\mathcal{E}$ est la matrice M : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = M$.

On pose $P(\lambda) = \det(M - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -7-\lambda & 0 & -8 \\ 4 & 1-\lambda & 4 \\ 4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix}$.

16. Montrer que $P(\lambda) = (1-\lambda)\left(\lambda^2 + 2\lambda - 3\right)$.
17. Résoudre l'équation $P(\lambda) = 0$ d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$.
18. On note $E_{-3} = \mathrm{Ker}(f + 3Id_{\mathbb{R}^3}) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| f(x,y,z) + 3(x,y,z) = (0,0,0) \right\}$.
    Déterminer une base de E_{-3}, ainsi que la dimension de E_{-3}.
19. On note $E_1 = \mathrm{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^3}) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| f(x,y,z) - (x,y,z) = (0,0,0) \right\}$.
    Déterminer une base de E_1, ainsi que la dimension de E_1.

On pose $\vec{u} = (-2,1,1)$, $\vec{v} = (0,1,0)$ et $\vec{w} = (1,0,-1)$.

20. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$.
21. On note P la matrice de passe de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{F}$. Déterminer P.
22. Déterminer P^{-1}.
23. On note D la matrice de f dans la base $\mathcal{F}$. Déterminer D.
24. Établir en justifiant une relation entre les matrices M, D, P et $P^{-1.}$
25. Montrer que pour tout entier naturel n : $M^n = PD^nP^{-1}$.
26. Expliciter les 9 coefficients de la matrice M^n pour tout entier naturel n.

Algèbre de matrices

On note E l'ensemble des matrices R appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $R = \lambda I_3 + \mu M$ avec λ et μ deux réels. On a donc

$$E = \left\{ \lambda I_3 + \mu M \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

27. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
28. Déterminer une base de E.
29. Montrer que M^2 appartient à E.
30. En déduire que le produit de deux éléments de E appartient à E.
31. Soit R une matrice quelconque de E. Montrer que la matrice $P^{-1}RP$ est diagonale.

Problème 2 : Suites récurrentes

Soit la fonction f définie par : pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \dfrac{3}{1+x^2}$.

32. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.
33. Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^3 + x - 3 = 0$.
34. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$, noté α, que l'on ne cherchera pas à déterminer.
    Vérifier que : $1 < \alpha < 2$.

On définit la fonction h sur $\mathbb{R}^+$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $h(x) = f \circ f(x) - x$.

35. Déterminer $h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
36. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $h(x) = -\dfrac{\left(x^2-3x+1\right)\left(x^3+x-3\right)}{\left(x^2+1\right)^2+9}$.
37. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet exactrement trois solutions distinctes : α, β et β' avec
    $$0 < \beta < \alpha < \beta',$$
    où α est le réel défini à la question 34.
38. Déterminer le signe de h sur $\mathbb{R}^+$.
39. Montrer que $f(\beta) = \dfrac{1}{\beta} = \beta'$ et $f\left(\beta'\right) = \dfrac{1}{\beta'} = \beta$.

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 \geqslant 0 \\ u_{n+1} = f\left(u_n\right) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

40. Montrer que la suite (u_n) est une suite à termes positifs.
41. Dans cette question, on suppose que $u_0 = 1$. Calculer alors les valeurs de u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle monotone ?
42. Dans cette question, on suppose que $u_0 = 2$. Calculer alors les valeurs de u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle monotone ?
43. Montrer que $f \circ f$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
44. Dans cette question, on suppose que $u_0 \in [0, \beta]$. Montrer que les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

Dans la suite du problème, on admet le résultat suivant : quelle que soit la valeur donnée à $u_0 \in \mathbb{R}^+$, les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

45. Comparer les sens de variations des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 1$ et lorsque $u_0 = 2$.
46. On appelle ℓ une éventuelle limite réelle de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que $\ell \in \{\alpha, \beta, \beta'\}$.
47. Si ℓ' est une éventuelle limite réelle de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, quelles sont les valeurs possibles de ℓ' ?

On étudie désormais la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans quelques cas particuliers.

48. Dans cette question, on suppose que $u_0 = \alpha$. Que dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? La suite est-elle convergente ?
49. Dans cette question, on suppose que $u_0 \in \{\beta, \beta'\}$. Que dire des suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$? La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Dans cette dernière partie, on suppose que $u_0 \in [0, \beta[$.

50. Montrer que pour tout $x \in [0, \beta]$, $f \circ f(x) \in [0, \beta]$.
51. En déduire que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0, \beta]$.
52. Montrer que $u_1 \in [\beta', 3]$.
53. Montrer que pour tout $x \in [\beta', 3]$, $f \circ f(x) \in [\beta', 3]$.
54. En déduire que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[\beta', 3]$.
55. En utilisant les variations des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, montrer qu'elles sont convergentes et déterminer leurs limites respectives.
56. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Problème 3 : Probabilités

On dispose de deux pièces de monnaie différentiables, dénommées dans la suite de l'exercice ≪ pièce 1 ≫ et ≪ pièce 2 ≫. On effectue une série de n lancers indépendants, où $n \in \mathbb{N}^\star$, avec l'une ou l'autre pièce selon un protocole décrit ensuite. Suivant les questions posées, l'entier n prendra différentes valeurs précisées dans l'énoncé. Pour chaque pièce, l'obtention du côté pile au cours d'un lancer peut être modélisée par une loi de Bernoulli de paramètre p_1 pour la première pièce et de paramètre p_2 pour la seconde pièce. On a : $0 < p_1 < 1$ et $0 < p_2 < 1$.

Pour $i \in [\![1, n]\!]$ on considère les évènements suivants :

— ≪ le i−ème lancer est effectué avec la pièce 1 et donne pile ≫, noté P_i,

— ≪ le i−ème lancer est effectué avec la pièce 1 et donne face ≫, noté $F_i = \overline{P_i}$,

— ≪ le i−ème lancer est effectué avec la pièce 2 et donne pile ≫, noté P_i' ,

— ≪ le i−ème lancer est effectué avec la pièce 2 et donne face ≫, noté $F_i' = \overline{P_i'}$.

Dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, où Ω désigne l'ensemble des séries de n lancers possibles, on a :

$$\begin{aligned} P(P_i) &= p_1, \\ P(F_i) &= 1 - p_1, \\ P(P_i') &= p_2, \\ P(F_i') &= 1 - p_2. \end{aligned}$$

Le protocole de lancer est le suivant : on choisit une des deux pièces au hasard et on effectue le premier lancer avec la pièce choisie. Si le résultat est pile, on rejoue avec la même pièce, sinon on change de pièce pour le lancer suivant. On itère le processus jusqu'au n-ème lancer en conservant la même pièce tant que le lancer donne pile et en changeant de pièce pour le lancer suivant lorsqu'on obtient face.

On note C_1 l'évènement ≪ choisir la pièce 1 au premier lancer ≫ et C_2 l'évènement ≪ choisir la pièce 2 au premier lancer ≫. On a $P(C_1) = P(C_2) = \dfrac{1}{2}$.

Partie A

Dans cette partie, on considère une série de 2 lancers ($n = 2$).

57. Quelle est la probabilité d'effectuer le second lancer avec la pièce 1 ?
58. On effectue le second lancer avec la pièce 1. Quelle est la probabilité que le premier lancer ait été effectué avec la pièce 2 ?

Partie B

Dans cette partie, on considère une série de 6 lancers ($n = 6$).

59. On suppose que la pièce 1 a été choisie pour le premier lancer. On note A l'évènement : ≪ obtenir successivement pile puis face avec la pièce 1, puis deux fois pile avec la pièce 2 ≫. Déterminer $P(A)$ en fonction des données p_1 et p_2.
60. On suppose que la pièce 2 a été choisie pour le premier lancer. On note B l'évènement : ≪ jouer cinq fois de suite avec la pièce 2, puis jouer le sixième lancer avec la pièce 1 ≫. Déterminer $P(B)$ en fonction des données p_1 et p_2.
61. Sachant que le premier lancer a été effectué avec la pièce 1, quelle est la probabilité de jouer les deux lancers suivants avec deux pièces différentes ?
62. Quelle est la probabilité d'effectuer les trois premiers lancers avec la même pièce ?
63. Dans cette question, on considère une série de 12 lancers ($n = 12$). Sachant que l'on a effectué le dixième lancer avec la pièce 1, quelle est la probabilité de jouer le douzième lancer avec la pièce 2 ?

Partie C

Dans cette partie, on considère une série de n lancers, où $n \in \mathbb{N}^\star$. On note D_n l'évènement "on utilise la pièce 1 pour la première fois au n−ème lancer".

64. Déterminer $P\left(D_n\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$.
    Indication : distnguer les cas $n = 1$ et $n > 1$.

Pour tout entier N supérieur ou égal à 2, on pose

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} P(D_n).$$

65. Montrer que $S_N = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left(1 - p_2^{N-1}\right)$ pour tout entier N supérieur ou égal à 2.
66. Justifier que S_N converge lorsque $N \to +\infty$ et calculer sa limite.
67. En supposant que l'on puisse effectuer une infinité de lancers, quelle est la probabilité de l'évènement ≪ ne jamais utiliser la pièce 1 ≫ ?

Partie D

Pour la suite de l'exercice, N désigne un entier supérieur ou égal à 2 fixé.

On considère l'expérience aléatoire suivante : on effectue N lancers selon le protocole étudié précédemment. On gagne 1 point chaque fois que l'on effectue un lancer avec la pièce 1 et on perd 1 point chaque fois que l'on effectue un lancer avec la pièce 2. La variable aléatoire X_N désigne le nombre de points obtenus à l'issue des N lancers. X_N peut donc prendre des valeurs entières $k \in [\![-N, N]\!]$.

La variable aléatoire U_N désigne le nombre de fois où on joue avec la pièce 1 au cours des N lancers.

68. Déterminer $P\left(X_N = N\right)$ et $P\left(X_N = -N\right)$.

Partie E

Dans cette partie, on suppose que $p_1 = p_2 = \dfrac{3}{10}$ et que $N = 3$.

69. Quel est le support de la variable aléatoire X_3 ?
70. Déterminer $P\left(X_3 = 2\right)$, $P\left(X_3 = 0\right)$ et $P\left(X_3 = -2\right)$.
71. Déterminer $P(X_3 = 1)$ en justifiant la démarche.
72. Déterminer la loi de la variable aléatoire X_3.
73. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X_3 : $E\left(X_3\right)$.
74. Déterminer la variance de la variable aléatoire X_3 : $V\left(X_3\right)$.

Partie F

Dans cette partie, on suppose que $p_1 = p_2 = \dfrac{3}{10}$ et que $N \geqslant 2$.

75. Soit $k \in [\![-N, N]\!]$. Exprimer l'événement « $X_N = k$ » en fonction de U_N.
76. En déduire $P\left(X_N = N - 1\right)$.
77. Que vaut $P\left(X_N = 0\right)$ lorsque N est un entier impair ?
78. Déterminer $P\left(X_N = N - 2\right)$ et $P\left(X_N = -N + 2\right)$.