Devoir surveillé n°8 - Mathématiques
Correction

Exercice 1 : Fonctions trigonométriques hyperboliques

On définit les fonctions trigonométriques hyperboliques cosh et sinh sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Partie A – Étude de fonctions

1. Étudier la parité des fonctions cosh et sinh.
   Correction. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cosh(-t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^t}{2} = \cosh(t)$ et $\sinh(-t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^t}{2} = -\dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2} = -\sinh(t)$.
   Ainsi cosh est une fonction paire et sinh est une fonction impaire.
2. Montrer que les fonctions cosh et sinh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\cosh'(t) = \sinh(t)$ et $\sinh'(t) = \cosh(t)$.
   Correction. Les fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^t$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Les fonctions cosh et sinh sont donc dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaisons linéaires de ces deux fonctions.
   Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\left[\mathrm{e}^t\right]' = \mathrm{e}^t$ et $\left[\mathrm{e}^{-t}\right]' = -\mathrm{e}^{-t}$. Ainsi
   $\cosh'(t) = \dfrac{1}{2}\left[\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\right]' = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}\right) = \sinh(t)$ et
   $\sinh'(t) = \dfrac{1}{2}\left[\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}\right]' = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^t - (-\mathrm{e}^{-t})\right) = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\right) = \cosh(t)$.
3. Dériver la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = (\cosh(t))^2 - (\sinh(t))^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire une relation entre $(\cosh(t))^2$ et $(\sinh(t))^2$.
   Correction. On rappelle que si u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $\left[u(t)^2\right]' = 2u'(t)u(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   Ici f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2\cosh'(t)\cosh(t) - 2\sinh'(t)\sinh(t) \\ &= 2\sinh(t)\cosh(t) - 2\cosh(t)\sinh(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Ainsi f est constante sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = f(0) = 1$.
   Conclusion : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cosh(t)^2 - \sinh(t)^2 = 1$.

4. Tracer les tableaux de variations des fonctions cosh et sinh. On précisera les limites en $-\infty$ et $+\infty$. On y fera apparaître les valeurs de cosh et de sinh en 0.

5. Montrer que l'équation $\sinh(t) = 1$ d'inconnue t admet une unique solution réelle que l'on notera dans la suite α.

   Correction. La fonction $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $\mathbb{R}$, d'après le théorème de la bijection. Ainsi 1 admet un unique antécédent par sinh, que l'on note α :
$$\sinh(\alpha) = 1.$$

6. On pose $z = e^{\alpha}$. Montrer que $z^2 - 2z - 1 = 0$.

   Correction. Par définition $\sinh(\alpha) = 1$, donc $\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha} - \mathrm{e}^{-\alpha}}{2} = 1$, donc $\dfrac{z - z^{-1}}{2} = 1$, donc $z - z^{-1} = 2$, donc $z - z^{-1} - 2 = 0$, d'où $z^2 - 1 - 2z = 0$.

   Conclusion : $z^2 - 2z - 1 = 0$.

7. En déduire la valeur exacte de α.

   Correction. On a
$$\begin{aligned} z^2 - 2z - 1 = 0 &\iff z = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} \quad \text{ou} \quad z = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} \\ &\iff z = 1 - \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad z = 1 + \sqrt{2} \\ &\iff z = 1 + \sqrt{2} && \text{car } z = \mathrm{e}^{\alpha} > 0 \text{ et } 1 - \sqrt{2} < 0 \\ &\iff \alpha = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

   Conclusion : $\alpha = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$.

8. Montrer que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$

   Correction. Comme $\sqrt{2} \simeq 1,4$ et $\mathrm{e} \simeq 2,7$, on a $1 \leqslant 1 + \sqrt{2} \leqslant \mathrm{e}$ et donc $\ln(1) \leqslant \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \leqslant \ln(\mathrm{e})$ (par croissance de la fonction ln), c'est-à-dire $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

9. Montrer que $\cosh(\alpha) = \sqrt{2}$.

   Correction. On sait que $\cosh(\alpha)^2 - \sinh(\alpha)^2 = 1$ (d'après Q3), or $\sinh(\alpha) = 1$, donc $\cosh(\alpha)^2 = 2$, donc $\cosh(\alpha) = -\sqrt{2}$ ou $\cosh(\alpha) = \sqrt{2}$. Comme $\cosh(t) \geqslant 1 > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (d'après Q4), on en déduit $\cosh(\alpha) = \sqrt{2}$.

Partie B – Suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale
$$I_n = \int_0^{\alpha} (\sinh t)^{2n} \mathrm{d}t.$$

10. Déterminer I_0.

    Correction. $I_0 = \alpha$.

11. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive.
    Que peut-on en déduire ?

Correction. La fonction $t \mapsto \sinh(t)^{2n}$ étant positive sur l'intervalle $[0, \alpha]$, on a $I_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par positivité de l'intégrale). De plus,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^\alpha \sinh(t)^{2n+2} \, \mathrm{d}t - \int_0^\alpha \sinh(t)^{2n} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\alpha \left(\sinh(t)^{2n+2} - \sinh(t)^{2n}\right) \, \mathrm{d}t && \text{(par linéarité)} \\ &= \int_0^\alpha \sinh(t)^{2n} \left(\sinh(t)^2 - 1\right) \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

or $t \mapsto \sinh(t)^{2n}$ est positive sur l'intervalle $[0, \alpha]$ et $0 \leqslant \sinh(t) \leqslant 1$ pour tout $t \in [0, \alpha]$, donc $t \mapsto \sinh(t)^2 - 1$ est négative sur $[0, \alpha]$. Ainsi $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par croissance de l'intervalle).
Conclusion : La suite (I_n) est positive et décroissante et donc convergente (d'après le théorème de la limite monotone). On note ℓ sa limite par la suite.

12. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+1} = \cosh \alpha - (2n+1)(I_{n+1} + I_n).$$

Correction. Les fonctions $t \mapsto \sinh(t)^{2n+1}$ et $t \mapsto \cosh(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[0, \alpha]$. On a

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^\alpha \sinh(t)^{2n+1} \times \sinh(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \left[\sinh(t)^{2n+1} \times \cosh(t)\right]_0^\alpha - \int_0^\alpha (2n+1) \cosh(t) \sinh(t)^{2n} \times \cosh(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \sinh(\alpha)^{2n+1} \times \cosh(\alpha) - \sinh(0)^{2n+1} \times \cosh(0) - (2n+1) \int_0^\alpha \sinh(t)^{2n} \cosh(t)^2 \, \mathrm{d}t \\ &= \cosh(\alpha) - (2n+1) \int_0^\alpha \sinh(t)^{2n} \left(\sinh(t)^2 + 1\right) \, \mathrm{d}t \\ &\text{(car } \sinh(\alpha) = 1 \text{ et } \cosh(t)^2 - \sinh(t)^2 = 1 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}) \\ &= \cosh(\alpha) - (2n+1) \left(I_{n+1} + I_n\right) \\ &\text{par linéarité de l'intégrale.} \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+1} = \cosh \alpha - (2n+1)(I_{n+1} + I_n).$$

13. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) I_n.$$

Correction. D'après Q9, on a montré que

$$I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+1)(I_{n+1} + I_n)$$

donc

$$(2n+2)I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+1)I_n$$

donc

$$I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+2} - \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right) I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

14. Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
Correction. Par passage à la limite dans la dernière relation obtenue, on a

$$\ell = 0 - 1 \times \ell$$

et donc $2\ell = 0$, doù $\ell = 0$.
Conclusion : $\lim I_n = 0$.

Partie C – Algorithmique

15. On souhaite obtenir un encadrement du réel α, solution de l'équation $\sinh(\alpha) - 1 = 0$, en appliquant un procédé de dichotomie. Recopier en la complétant la fonction *Python* suivante, qui prend en argument un réel strictement positif $\varepsilon > 0$, et renvoie une liste de deux réels a et b vérifiant $a \leqslant \alpha \leqslant b$ et $b - a < \varepsilon$.

```
from math import sinh

def dicho(eps):
    a=0
    b=1
    while b-a>=eps :
        c=float(a+b)/2
        if (sinh(c)-1)<0 :
            a=c
        else :
            b=c
    return [a,b]
```

Exercice 2 : Calcul d'intégrales par changement de variable

Partie A

16. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer

$$I = \int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

Correction. Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1, \mathrm{e}]$. On a

$$\begin{aligned} I &= [x\ln(x)]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} 1 \,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}\ln(\mathrm{e}) - 0 - (\mathrm{e} - 1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Conclusion : $I = 1$.

17. En posant $x = \sqrt{t}$, déterminer

$$J = \int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \,\mathrm{d}t.$$

Correction. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et en particulier sur $[1, \mathrm{e}^2]$. On a, par changement de variables,

$$\begin{aligned} J &= \int_1^{\mathrm{e}^2} 2\ln(t) \times \frac{1}{2\sqrt{t}} \,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^2}} 2\ln(x^2) \,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^{\mathrm{e}} 4\ln(x) \,\mathrm{d}x \\ &= 4I \\ &= 4. \end{aligned}$$

Conclusion $J = 4$.

Partie B

18. En posant $x = 1 + \mathrm{e}^t$, déterminer

$$K = \int_0^1 \frac{1}{(1 + \mathrm{e}^t)(1 + \mathrm{e}^{-t})} \,\mathrm{d}t.$$

Correction. La fonction $t \mapsto 1 + \mathrm{e}^t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[0, 1]$ et par changement de variables, on a

$$\begin{aligned} K &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{(1 + \mathrm{e}^t)\mathrm{e}^t(1 + \mathrm{e}^{-t})} \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1 + \mathrm{e}^t)^2} \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \\ &= \int_{1+\mathrm{e}^0}^{1+\mathrm{e}} \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{1}{x}\right]_2^{1+\mathrm{e}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{1 + \mathrm{e}}. \end{aligned}$$

Conclusion : $K = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1+\mathrm{e}}$.

Partie C

Questions préliminaires On pose $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

19. Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f.
    Correction. $D_f = \mathbb{R}^\star$.

20. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en $x = 0$?
    Correction. On a $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$. Comme $\lim_{0^-} f \neq \lim_{0^+} f$, la fonction f n'est pas prolongeable en 0.

21. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$.
    Correction. arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, donc $x \mapsto \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ par composition. D'où f dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ (par somme).
    Pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$,
$$\begin{aligned} f'(x) &= \arctan'(x) + \left[\frac{1}{x}\right]' \arctan'\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

22. En déduire que pour tout $x > 0$, $\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(x)$.
    Correction. La fonction f est constante sur $]0, +\infty[$ (car f' est nulle) et pour tout $x > 0$:
$$f(x) = f(1) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2},$$
    c'est-à-dire
$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$
    Conclusion : Pour tout $x > 0$, $\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(x)$.

Calcul d'intégrales Soit $a > 0$. On note
$$I_a = \int_{1/2}^{2} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_a = \int_{1/2}^{2} \frac{t^a}{(1+t^2)(1+t^a)}\,\mathrm{d}t.$$

23. Calculer $I_a + J_a$.

Correction.

$$\begin{aligned} I_a + J_a &= \int_{1/2}^{2} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)} + \frac{t^a}{(1+t^2)(1+t^a)} \,\mathrm{d}t && \text{(par linéarité)} \\ &= \int_{1/2}^{2} \frac{1+t^a}{(1+t^2)(1+t^a)} \,\mathrm{d}t \\ &= \int_{1/2}^{2} \frac{1}{1+t^2} \,\mathrm{d}t \\ &= \arctan(2) - \arctan(1/2). \end{aligned}$$

Conclusion : $I_a + J_a = \arctan(2) - \arctan(1/2)$.

24. En posant $x = \dfrac{1}{t}$, montrer que $I_a = J_a$.

Correction. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1/2; 2]$. Par changement de variables, on a

$$\begin{aligned} I_a &= \int_{1/2}^{2} \frac{-t^2}{(1+t^2)(1+t^a)} \times \frac{1}{-t^2} \,\mathrm{d}t \\ &= -\int_{2}^{1/2} \frac{(1/x)^2}{(1+(1/x)^2)(1+(1/x)^a)} \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{1/2}^{2} \frac{x^2 \times x^a \times \left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right) x^a \left(1+\dfrac{1}{x^a}\right)} \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{1/2}^{2} \frac{x^a}{(x^2+1)(x^a+1)} \,\mathrm{d}x \\ &= J_a. \end{aligned}$$

Conclusion : $I_a = J_a$.

25. En déduire que $I_a = \arctan(2) - \dfrac{\pi}{4}$.

Correction. En utilisant les résultats $Q23$ et $Q24$, on a

$$\begin{aligned} 2I_a &= \arctan(2) - \arctan(1/2) \\ &= \arctan(2) - \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(2)\right) && \text{d'après } Q22 \\ &= 2\arctan(2) - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

D'où $I_a = \arctan(2) - \dfrac{\pi}{4}$.