Devoir surveillé n°9 – Mathématiques – Durée : 2 heures

CALCULATRICE INTERDITE

Exercice 1. Calcul d'intégrale par changement de variable

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_{e^2}^{e^3} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ en posant $u = \ln(t)$;
2. $J = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{t}{2\sqrt{t+1}}\,\mathrm{d}t$ en posant $u = \sqrt{t+1}$.

Exercice 2. Développement limité de $\arctan(x)$

Dans cette exercice, on retrouve le développement limité de la fonction $\arctan(x)$ à l'ordre 5 en $x = 0$ en appliquant différentes méthodes.

Partie I - Cours

3. Rappeler le développement usuel d'ordre 5 en $x = 0$ de la fonction $\arctan(x)$ (question de cours).

Partie II - Intégration terme à terme d'un développement limité

4. Rappeler le $DL_2(0)$ de la fonction $\dfrac{1}{1+x}$.
5. En déduire le $DL_4(0)$ de la fonction $\dfrac{1}{1+x^2}$.
6. En déduire le $DL_5(0)$ de la fonction $\arctan(x)$.

Partie III - Développement limité d'une fonction réciproque

7. Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x) \end{array}$ réalise une bijection.

On note arctan la bijection réciproque de la fonction f.

8. Déterminer le $DL_5(0)$ des fonctions $\dfrac{1}{\cos(x)}$ et $\sin(x)$.
   Indication : Dans la suite, on pourra admettre, en cas de difficulté, que $\dfrac{1}{\cos(x)} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{24}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$.
9. En déduire le $DL_5(0)$ de la fonction $\tan(x)$.
   Indication : Dans la suite, on pourra admettre, en cas de difficulté, que $\tan(x) = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)$.
10. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier qu'il existe un unique $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = \tan\theta$.
11. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(-x) = -\arctan(x)$. Interpréter.

On admet que $\arctan(x) = ax + bx^3 + cx^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)$, avec a, b, c des réels.

12. Déterminer les $DL_5(0)$ de $\tan(x)^3$ et de $\tan(x)^5$.
13. En déduire le $DL_5(0)$ de $\arctan(\tan(x))$ en fonction de a, b et c.

14. En exploitant la relation $\arctan(\tan(x)) = x$, déterminer les réels a, b et c. Conclure.

Exercice 3. (CCINP 2021 - TSI)

On rappelle que pour x réel strictement positif et α réel, on note $\boxed{x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}}$. On considère la fonction $g : x \mapsto x^x$ et on pose $I =]0; +\infty[$ son ensemble de définition.

Partie I - Étude de la fonction g

15. Calculer $g(1)$.

16. Justifier que g est dérivable sur I et montrer que pour tout $x \in I$:

$$g'(x) = (1 + \ln(x))\, \mathrm{e}^{x \ln(x)}.$$

17. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x).$$

18. Dresser le tableau de variations de g sur I.

19. Montrer que $g(x)$ admet un développement limité d'ordre 2 en $x = 1$:

$$g(x) \underset{x \to 1}{=} 1 + (x-1) + (x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right).$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g et T la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1.

20. En déduire l'équation de T, ainsi que la position relative de T par rapport à $\mathscr{C}_g$.

21. Représenter sur le même graphique $\mathscr{C}_g$ et T sur l'intervalle $]0, 2]$. On donne $\mathrm{e}^{-1} \simeq 0,37$ et $g\left(\mathrm{e}^{-1}\right) \simeq 0,69$.

22. En utilisant le graphique, justifier l'encadrement :

$$\mathrm{e}^{-1} < \int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x < 1.$$

Partie II - Une approximation plus précise de $\int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x$

23. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x$.

24. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}$. Justifier que la fonction $x \mapsto x^n (\ln x)^k$ est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement prend la valeur 0 en 0.

Dans la suite, on notera $\tilde{g}$ le prolongement de la fonction g.

25. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 x^n (\ln x)^k \, \mathrm{d}x = -\frac{k}{n+1} \int_0^1 x^n (\ln x)^{k-1} \, \mathrm{d}x.$$

26. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, en déduire par récurrence sur k, que pour tout entier naturel k, on a :

$$\int_0^1 x^n (\ln x)^k \, \mathrm{d}x = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}.$$

27. Justifier que cette égalité est encore vraie pour $(n, k) = (0, 0)$.