Devoir surveillé n°9 – Mathématiques
Correction

Exercice 1. Calcul d'intégrale par changement de variable

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_{e^2}^{e^3} \frac{1}{t\ln(t)}\,dt$ en posant $u = \ln(t)$;

$$\begin{aligned} I &= \int_{e^2}^{e^3} \frac{1}{t\ln(t)}\,dt \\ &= \int_2^3 \frac{1}{u}\,du \\ &= \left[\ln(|u|)\right]_2^3 \\ &= \ln\left(\frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

2. $J = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{t}{2\sqrt{t+1}}\,dt$ en posant $u = \sqrt{t+1}$.

$$\begin{aligned} J &= \int_{-1}^{0} \frac{t}{2\sqrt{t+1}}\,dt \\ &= \int_0^1 \left(u^2-1\right)\,du \\ &= \left[\frac{u^3}{3} - u\right]_0^1 \\ &= -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 2. Développement limité de $\arctan(x)$

Dans cette exercice, on retrouve le développement limité de la fonction $\arctan(x)$ à l'ordre 5 en $x = 0$ en appliquant différentes méthodes.

Partie I - Cours

3. Rappeler le développement usuel d'ordre 5 en $x = 0$ de la fonction $\arctan(x)$ (question de cours).

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^5\right).$$

Partie II - Intégration terme à terme d'un développement limité

4. Rappeler le $DL_2(0)$ de la fonction $\dfrac{1}{1+x}$.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$

5. En déduire le $DL_4(0)$ de la fonction $\dfrac{1}{1+x^2}$.

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).$$

6. En déduire le $DL_5(0)$ de la fonction $\arctan(x)$.

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Par intégration terme à terme du DL précédent, on obtient :

$$\arctan(x) = \arctan(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right),$$

c'est-à-dire

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right).$$

Partie III - Développement limité d'une fonction réciproque

7. Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x) \end{array}$ réalise une bijection.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, donc $f : \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\to f\left(\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\right)$ est bijective. Comme $\displaystyle\lim_{x\to(-\pi/2)^+} f(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to(\pi/2)^+} f(x) = +\infty$, on en déduit que $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est bijective.

On note arctan la bijection réciproque de la fonction f.

8. Déterminer le $DL_5(0)$ des fonctions $\dfrac{1}{\cos(x)}$ et $\sin(x)$.

Indication : Dans la suite, on pourra admettre, en cas de difficulté, que $\dfrac{1}{\cos(x)} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{24}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(x)} &\underset{0}{=} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)} \\
&= 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + o\left(x^4\right) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{24}\right)x^4 + o\left(x^4\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

9. En déduire le $DL_5(0)$ de la fonction $\tan(x)$.
Indication : Dans la suite, on pourra admettre, en cas de difficulté, que $\tan(x) = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)$.

$$\begin{aligned}
\tan(x) &\underset{0}{=} \sin(x) \times \frac{1}{\cos(x)} \\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)\right)\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right) \\
&= x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{24}x^5 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right) \\
&= x + \frac{2}{6}x^3 + \frac{16}{120}x^5 + o\left(x^5\right) \\
&= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

10. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier qu'il existe un unique $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = \tan\theta$.
La fonction $f : \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x) \end{array}$ étant bijective, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = f(\theta)$, c'est-à-dire tel que $x = \tan\theta$.

11. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(-x) = -\arctan(x)$. Interpréter.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = \tan\theta$ et $\theta = \arctan x$.

$$\begin{aligned}
\arctan(-x) &= \arctan\left(-\tan\theta\right) \\
&= \arctan(\tan(-\theta)) && \text{car tan est impaire} \\
&= -\theta \\
&= -\arctan(x).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(-x) = -\arctan(x)$.
Interprétation : La fonction arctan est impaire. Son graphe est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

On admet que $\arctan(x) = ax + bx^3 + cx^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)$, avec a, b, c des réels.

12. Déterminer les $DL_5(0)$ de $\tan(x)^3$ et de $\tan(x)^5$.

$$\begin{aligned}
\tan(x)^2 &= \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\right)^2 \\
&= x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right) \\
\tan(x)^3 &= \tan(x)^2 \times \tan(x) \\
&= \left(x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\right) \times \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\right) \\
&= x^3 + x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right) \\
\tan(x)^5 &= \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\right)^5 \\
&= x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

13. En déduire le $DL_5(0)$ de $\arctan(\tan(x))$ en fonction de a, b et c.

$$\begin{aligned}
\arctan(\tan(x)) &= a\tan(x) + b\tan(x)^3 + c\tan(x)^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right) \qquad \text{car } \tan(x) \underset{x\to 0}{\to} 0 \\
&= a\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5\right) + b\left(x^3 + x^5\right) + cx^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right) \\
&= ax + \left(\frac{a}{3} + b\right)x^3 + \left(\frac{2a}{15} + b + c\right)x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

14. En exploitant la relation $\arctan(\tan(x)) = x$, déterminer les réels a, b et c. Conclure.

D'une part,

$$\arctan(\tan(x)) = ax + \left(\frac{a}{3} + b\right)x^3 + \left(\frac{2a}{15} + b + c\right)x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right).$$

D'autre part,

$$\arctan\left(\tan(x)\right) = x + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right).$$

Ainsi par unicité du développement limité, on a

$$\begin{cases} a = 1 \\ \dfrac{a}{3} + b = 0 \\ \dfrac{2a}{15} + b + c \end{cases},$$

d'où $a = 1$, $b = -\dfrac{1}{3}$ et $c = -\dfrac{2}{15} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{5}$.
Finalement

$$\arctan(x) = ax + bx^3 + cx^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right).$$

Exercice 3. (CCINP 2021 - TSI)

On rappelle que pour x réel strictement positif et α réel, on note $\boxed{x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}}$. On considère la fonction $g : x \mapsto x^x$ et on pose $I =]0; +\infty[$ son ensemble de définition.

Partie I - Étude de la fonction g

15. Calculer $g(1)$.
    $g(1) = 1$
16. Justifier que g est dérivable sur I et montrer que pour tout $x \in I$:

$$g'(x) = (1 + \ln(x))\, \mathrm{e}^{x \ln(x)}.$$

La fonction $x \mapsto x \ln(x)$ est dérivable sur I (produit de fonctions usuelles dérivables sur I) et la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction g est donc dérivable sur I par composition de fonctions dérivables.
Pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= [x \ln x]'\, \mathrm{e}^{x \ln(x)} \\ &= \left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{x \ln(x)} \\ &= (1 + \ln(x))\, \mathrm{e}^{x \ln(x)}. \end{aligned}$$

17. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x).$$

$\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$ (limite à connaître) donc $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \mathrm{e}^0 = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

18. Dresser le tableau de variations de g sur I.
    $g'(x) = 0 \iff 1 + \ln(x) = 0 \iff x = \mathrm{e}^{-1}$.
    g est décroissante sur $]0, \mathrm{e}^{-1}]$ et croissante sur $[e^{-1}, +\infty[$.

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	|| 1	$\searrow$	$e^{-1/e}$	$\nearrow$	$+\infty$

19. Montrer que $g(x)$ admet un développement limité d'ordre 2 en $x = 1$:

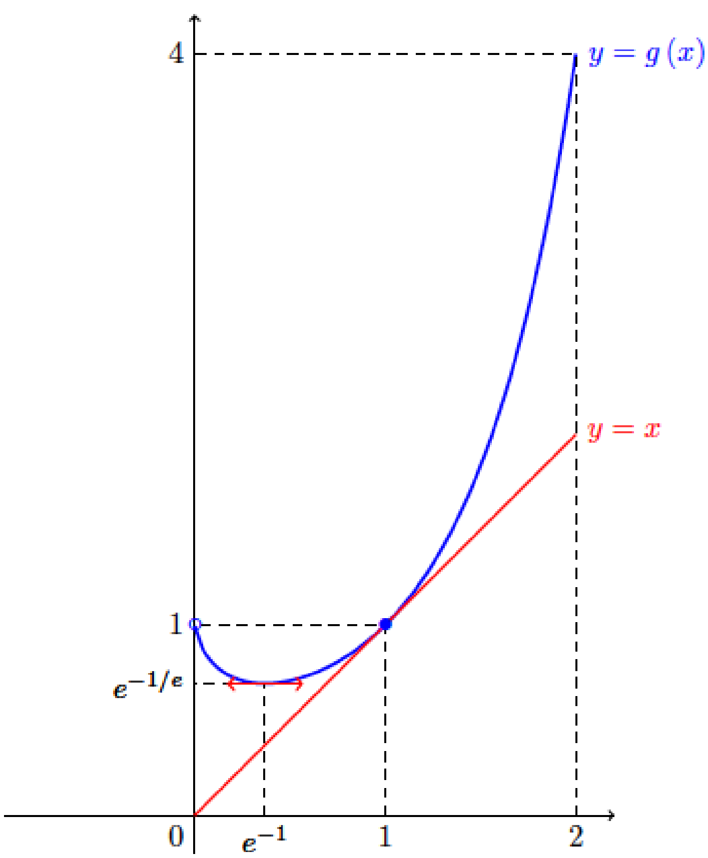
$$g(x) \underset{x \to 1}{=} 1 + (x-1) + (x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right).$$

On pose $x = 1 + h$ avec $h \to 0$.

$$\begin{aligned}
g(x) &= g(1+h) \\
&= \mathrm{e}^{(1+h)\ln(1+h)} \\
&= \mathrm{e}^{(1+h)\left(h-\frac{h^2}{2}+o(h)\right)} \\
&= \mathrm{e}^{h+\frac{h^2}{2}+o(h^2)} \\
&= 1 + \left(h + \frac{h^2}{2}\right) + \frac{1}{2}h^2 + o(h^2) \\
&\underset{h\to 0}{=} 1 + h + h^2 + o(h^2) \\
&\underset{x\to 1}{=} 1 + (x-1) + (x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)
\end{aligned}$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g et T la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1.

20. En déduire l'équation de T, ainsi que la position relative de T par rapport à $\mathscr{C}_g$.
    $T \,:\, y = 1 + (x-1)$ ie $T \,:\, y = x$.
    Comme $(x-1)^2 \geqslant 0$, $\mathscr{C}_g$ est au dessus de T au voisinage de $x = 1$.
21. Représenter sur le même graphique $\mathscr{C}_g$ et T sur l'intervalle $]0, 2]$.
    On donne $\mathrm{e}^{-1} \simeq 0,37$ et $g\left(\mathrm{e}^{-1}\right) \simeq 0,69$.



22. En utilisant le graphique, justifier l'encadrement :

$$\mathrm{e}^{-1} < \int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x < 1.$$

Sur l'intervalle $[0, 1]$, on a $g(\mathrm{e}^{-1}) \leqslant g(x) \leqslant 1$. On en déduit que

$$g(e^{-1}) \times 1 \leqslant \int_0^1 g(x) \, \mathrm{d}x \leqslant 1 \times 1.$$

or $\mathrm{e}^{-1} < g(\mathrm{e}^{-1})$, d'où

$$\mathrm{e}^{-1} < \int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x \leqslant 1.$$

Partie II - Une approximation plus précise de $\int_0^1 x^x \, \mathrm{d}x$

23. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x$.

$$\int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

24. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}$. Justifier que la fonction $x \mapsto x^n (\ln x)^k$ est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement prend la valeur 0 en 0.
Comme $n > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^n (\ln x)^k = 0$ (par croissances comparées).
La fonction $x \mapsto x^n (\ln x)^k$ est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement prend la valeur 0 en 0.

Dans la suite, on notera $\tilde{g}$ le prolongement de la fonction g.

25. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 x^n \left(\ln x\right)^k \, \mathrm{d}x = -\frac{k}{n+1} \int_0^1 x^n \left(\ln x\right)^{k-1} \, \mathrm{d}x.$$

Soit $\alpha \in]0, 1[$. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ et $x \mapsto (\ln x)^k$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\alpha, 1]$, on a

$$\begin{aligned}\int_\alpha^1 \overset{\nearrow}{x^n} \underset{\searrow}{(\ln x)^k} \, \mathrm{d}x &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x)^k\right]_\alpha^1 - \int_\alpha^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} \times k \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^{k-1} \, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{\alpha^{n+1}}{n+1} (\ln \alpha)^k - \frac{k}{n+1} \int_\alpha^1 x^n \left(\ln x\right)^{k-1} \, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

En faisant tendre α vers 0^+, on obtient l'égalité souhaitée.

26. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, en déduire par récurrence sur k, que pour tout entier naturel k, on a :

$$\int_0^1 x^n \left(\ln x\right)^k \, \mathrm{d}x = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}.$$

On définit pour $k \in \mathbb{N}$, H_k : « $\int_0^1 x^n (\ln x)^k \, \mathrm{d}x = \dfrac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}$ »

$\int_0^1 x^n (\ln x)^0 \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x = \dfrac{1}{n+1}$ et $\dfrac{(-1)^0 0!}{(n+1)^{0+1}} = \dfrac{1}{n+1}$, donc H_0 est vraie.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose H_k vraie et on montre H_{k+1} : « $\int_0^1 x^n (\ln x)^{k+1} \, \mathrm{d}x = \dfrac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{(n+1)^{k+2}}$ »

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^n (\ln x)^{k+1} \, \mathrm{d}x &= -\frac{k+1}{n+1} \int_0^1 x^n (\ln x)^k \, \mathrm{d}x && \text{d'après } Q25 \\
&= -\frac{k+1}{n+1} \times \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}} && \text{d'après } H_k \\
&= \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{(n+1)^{k+2}}.
\end{aligned}$$

donc H_{k+1} est vraie.

Conclusion : Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour tout entier naturel k, on a :

$$\int_0^1 x^n (\ln x)^k \, \mathrm{d}x = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}.$$

27. Justifier que cette égalité est encore vraie pour $(n,k) = (0,0)$.

D'une part,

$$\int_0^1 x^0 (\ln x)^0 \, \mathrm{d}x = \int_0^1 1 \, \mathrm{d}x = 1$$

et d'autre part,

$$\frac{(-1)^0 0!}{(0+1)^{0+1}} = 1$$

donc l'égalité est encore vérifiée pour $(n,k) = (0,0)$.

Finalement, pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\int_0^1 x^n (\ln x)^k \, \mathrm{d}x = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}.$$