Le second degré

– Trinôme du second degré –

On appelle **trinôme du second degré** l'expression
$$ax^2 + bx + c \quad \text{avec} \quad a \neq 0.$$

– Racines (réelles) du trinôme –

On appelle **racines du trinôme** les solutions réelles de l'équation
$$ax^2 + bx + c = 0.$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

• Si $\Delta > 0$, le trinôme a deux racines distinctes :
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

• Si $\Delta = 0$, le trinôme a une racine double :
$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

• Si $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de racine.

– Factorisation du trinôme –

• Si $\Delta > 0$, alors
$$ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right).$$

Dans ce cas,
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

• Si $\Delta = 0$, alors
$$ax^2 + bx + c = a\left(x - x_0\right)^2.$$

Dans ce cas,
$$2x_0 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_0^2 = \frac{c}{a}.$$

• Si $\Delta < 0$, le trinôme est irréductible.

– Signe du trinôme –

• Si $\Delta > 0$, le trinôme est du signe de a sauf entre ses racines.
On suppose $x_1 < x_2$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		a	0	$-a$	0	a	

• Si $\Delta = 0$, le trinôme est nul en x_0 et du signe de a sinon.

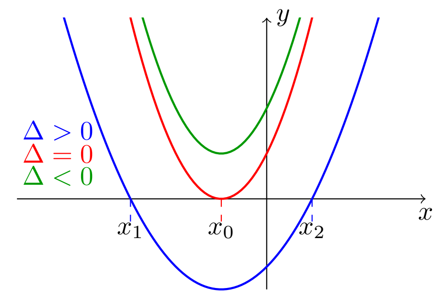
x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax^2+bx+c		a	0	a	

• Si $\Delta < 0$, le trinôme est toujours du signe de a.

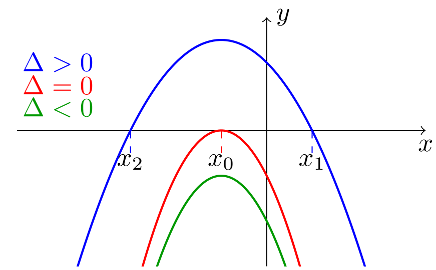
x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		a	

– Représentation du trinôme –

• Si $a > 0$:



• Si $a < 0$:



– Système somme/produit –

Soit le système $\begin{cases} x + y &= S \\ xy &= P \end{cases}$.

Si (x, y) est solution, alors (y, x) l'est aussi.

x et y sont les solutions de l'équation
$$x^2 - Sx + P = 0.$$

– Équation bicarrée –

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 - x^2 - 20 = 0$.

$$\begin{aligned}
x^4 - x^2 - 20 = 0 &\iff \left(x^2\right)^2 - x^2 - 20 = 0 \\
&\iff X^2 - X - 20 = 0 && \# \; X = x^2 \\
&\iff X = 5 \text{ ou } X = -4 && \# \; \Delta = 81 \\
&\iff x^2 = 5 \text{ ou } x^2 = -4 && \# \; X = x^2 \\
&\iff x = \pm\sqrt{5}
\end{aligned}$$

car $x^2 = -4$ n'admet pas de solution réelle.
<u>Conclusion</u> : $\mathscr{S} = \left\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right\}$.

– Système somme/produit –

Résoudre le système $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = -5 \end{cases}$.

On sait que

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = -5 \end{cases} \iff x \text{ et } y \text{ sont les solutions de } X^2 - 4X - 5 = 0,$$

or

$$\begin{aligned}
X^2 - 4X - 5 = 0 &\iff X = \frac{4 - \sqrt{36}}{2} \quad \text{ou} \quad X = \frac{4 + \sqrt{36}}{2} \\
&\iff X = -1 \quad \text{ou} \quad X = 5,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = -5 \end{cases} \iff (x, y) = (-1, 5) \quad \text{ou} \quad (x, y) = (5, -1).$$

<u>Conclusion</u> : $\mathscr{S} = \{(-1, 5), (5, -1)\}$.

– Cas particulier $b = 0$ –

Déterminer les racines de $2x^2 - 3$.

$$\begin{aligned}
2x^2 - 3 = 0 &\iff 2x^2 = 3 \\
&\iff x^2 = \frac{3}{2} \\
&\iff x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

<u>Conclusion</u> : Les racines de $2x^2 - 3$ sont $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ et $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

– Cas particulier $c = 0$ –

Déterminer les racines de $2x^2 - 3x$.

$$\begin{aligned}
2x^2 - 3x = 0 &\iff x(2x - 3) = 0 \\
&\iff x = 0 \text{ ou } 2x - 3 = 0 \\
&\iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

<u>Conclusion</u> : Les racines de $2x^2 - 3x$ sont 0 et $\frac{3}{2}$.

– Inéquations se ramenant au second degré –

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x+3}{1-x} \geqslant -5x + 3$.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\begin{aligned}
\frac{x+3}{1-x} \geqslant -5x + 3 &\iff \frac{x+3}{1-x} + 5x - 3 \geqslant 0 \\
&\iff \frac{x+3}{1-x} + \frac{(5x-3)(1-x)}{1-x} \geqslant 0 \\
&\iff \frac{-5x^2 + 9x}{1-x} \geqslant 0
\end{aligned}$$

Zéro(s) du numérateur :

$$\begin{aligned}
-5x^2 + 9x = 0 &\iff x(-5x + 9) = 0 \\
&\iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{9}{5}.
\end{aligned}$$

Zéro(s) du dénominateur (valeur(s) interdite(s)) : $1 - x = 0 \iff x = 1$.

x	$-\infty$		0		1		$\frac{9}{5}$		$+\infty$
$-5x^2+9x$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{-5x^2+9x}{1-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

<u>Conclusion</u> : $\mathscr{S} = [0, 1[\cup \left[\frac{9}{5}, +\infty\right[$.