On considère la fonction f définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$\forall x \in I, f(x) = \frac{\sin(x)+1}{\cos(x)}$$

1. f est-elle de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I?

2. Exprimer les dérivées f' et f'' à l'aide des fonctions usuelles.

3. Montrer qu'il existe $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, suite de polynômes à coefficients réels telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in I : \ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$

4. Expliciter les polynômes P_0, P_1, P_2. Pour tout n de $\mathbb{N}$, exprimer P_{n+1} en fonction de P_n et P_n'.

5. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, P_n$ est unitaire, de degré n et que ses coefficients sont des entiers naturels.

6. Montrer que pour tout $x \in I$, on a : $\quad 2f'(x) = f^2(x) + 1 \ (*)$

7. Pour tout entier naturel n, on pose $\alpha_n = f^{(n)}(0) = P_n(0)$. Déduire de la relation $(*)$ que $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$, puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}.$$

Pour n dans $\mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.

2. Intégrer par parties I_{n+1} en posant $u'(t) = 1$.

3. Exprimer $\int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt$ en fonction de I_n et I_{n+1}.

4. En déduire que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a : $I_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+3} I_n$.

5. Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $I_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

6. Prouver que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{(2n+1)}(u)du$$

.

****

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour quelles valeurs de n entier naturel, le polynôme $P = (X+1)^n - X^n - 1$ est-il divisible par $Q = X^2 + X + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$