Programme de colles n°22
Du 24/03 au 28/03

Sous-espaces vectoriels - Familles libres, génératrices et bases

Au programme : Première partie « Espaces et sous-espaces vectoriels » + Deuxième partie « Familles finies de vecteurs »

Hors programme cette semaine : Somme de sous-espaces vectoriels $F+G$

`https://tsimaths.lycee-louis-vincent.fr/cours17.pdf`
`https://tsimaths.lycee-louis-vincent.fr/TD17.pdf`

Savoir définir les notions suivantes :

- F est un sous-espace vectoriel de E,
- $\text{Vect}\left(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n}\right)$,
- $\overrightarrow{y} \in \text{Vect}\left(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n}\right)$,
- $(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n})$ est une famille libre,
- $(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n})$ est une famille génératrice de F,
- $(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n})$ est une base de F.

À connaître :

- $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de référence : $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot\right)$, $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$, $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$, $(\mathscr{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$
- $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de référence : $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}), +, \cdot)$, $(\mathbb{C}[X], +, \cdot)$
- L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à p inconnues (à coefficients dans $\mathbb{K}$) est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}^p, +, \cdot)$.
- L'ensemble des solutions sur un intervalle I d'une équation différentielle linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$.
- Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n}$ des vecteurs de E. Alors $\text{Vect}\left(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n}\right)$ est un sous-espace vectoriel de E.
- Si F, G deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration exigible :

- Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercices traités en classe :

Exercice 1. On note F est l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \ x + 2y + 3z = 0 \text{ et } x - y - z = 0\right\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Exercice 2. On note $\mathscr{H}$ l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y' + xy = 0 \ (H).$$

Montrer que $\mathscr{H}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\cdot)$.

Exercice 3. Soit $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2y + z = 0\right\}$.

Montrer que $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 4. Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

1. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x + y = 1\right\}$.
2. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \leq y\right\}$.
3. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ xy = 0\right\}$.
4. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x = y\right\}$.
5. $\{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
6. $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ y = 0\right\}$.
7. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 = 1\right\}$.
8. $E_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid\ P(0) = P(2)\}$.
9. $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(0) = 2\}$.
10. Pour $A \in \mathbb{R}[X]$ non nul fixé, $E_3 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid A \text{ divise } P\}$.
11. E_4, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$, où a est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
12. E_5, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = x$, où a est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Montrer que les ensembles suivants, munis des opérations classiques, sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

1. l'ensemble des nombres complexes imaginaires purs.
2. l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
3. l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M^T = M\right\}$ des matrices symétriques de taille $n \times n$.
5. l'ensemble des fonctions paires (impaires) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
6. l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ (avec $n \in \mathbb{N}$ fixé).

Exercice 6. Montrer les assertions suivantes :

1. Dans $\left(\mathbb{R}^2,+,\cdot\right)$, les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ constituent une famille libre.
2. Dans $(\mathbb{R}[X],+,\cdot)$, les polynômes $P_1 = 1$, $P_2 = 1 + X$ et $P_3 = 1 + X + X^2$ sont linéairement indépendants.
3. Dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$, les matrices suivantes constituent une famille libre :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, les fonctions cos et sin sont linéairement indépendantes .

Exercice 7. Déterminer une famille génératrice des sous-espaces vectoriels suivants :

1. Dans $\mathbb{R}^3$: on note
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 4a - b \\ 2a - b \\ 6a - b \end{pmatrix} \middle| (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
2. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: on note
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & a - 2b \\ 3c & a \end{pmatrix} \middle| (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$
3. Dans $\mathbb{R}[X]$: on note
$$H = \left\{ \alpha X^3 + (\alpha - \beta)X^2 + 2\alpha X - \beta \ \middle|\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 8. Déterminer une famille génératrice des sous-espaces vectoriels suivants :

1. Dans $\mathbb{R}^3$: on note
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x - y - z = 0 \text{ et } x + y - 3z = 0 \right\}.$$

2. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: on note

$$G = \{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) |\, AM = MA \},$$

où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Dans $\mathbb{R}[X]$: on note

$$H = \{ P \in \mathbb{R}_2[X] |\, P(1) = 0 \}.$$

Exercice 9. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels suivants :

1. Dans $\mathbb{R}^3$: on note

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x - y - z = 0 \text{ et } x + y - 3z = 0 \right\}.$$

2. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: on note

$$G = \{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) |\, AM = MA \},$$

où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Dans $\mathbb{R}[X]$: on note

$$H = \{ P \in \mathbb{R}_2[X] |\, P(1) = 0 \}.$$