Lycée Louis Vincent
C. Scholl

Programme de colles n°23
Du 02/04 au 05/04

Sous-espaces vectoriels et familles libres

Au programme : Première partie « Espaces et sous-espaces vectoriels » + Deuxième partie « Familles libres » uniquement

`https://tsimaths.lycee-louis-vincent.fr/cours17.pdf`
`https://tsimaths.lycee-louis-vincent.fr/TD17.pdf`

Savoir définir les notions suivantes :

- F est un sous-espace vectoriel de E,
- $\text{Vect}\left(\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_n}\right)$,
- $\overrightarrow{y} \in \text{Vect}\left(\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_n}\right)$,
- Définition de $F+G$ (où F et G sont des sous-espaces vectoriels de E),
- $\left(\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_n}\right)$ est une famille libre.

À connaître :

- $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de référence : $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$, $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$, $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,\cdot\right)$, $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+,\cdot)$, $(\mathbb{K}[X],+,\cdot)$, $(\mathscr{F}(I,\mathbb{R}),+,\cdot)$
- $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de référence : $(\mathbb{C},+,\cdot)$, $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}),+,\cdot)$, $(\mathbb{C}[X],+,\cdot)$
- L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à p inconnues (à coefficients dans $\mathbb{K}$) est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}^p,+,\cdot)$.
- L'ensemble des solutions sur un intervalle I d'une équation différentielle linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{F}(I,\mathbb{R}),+,\cdot)$.
- Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_n}$ des vecteurs de E. Alors $\text{Vect}\left(\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_n}\right)$ est un sous-espace vectoriel de E.
- Si F, G deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
- Si F, G deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.
- Si $F = \text{Vect}\left(\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_n}\right)$ et $G = \text{Vect}\left(\overrightarrow{y_1}, \ldots, \overrightarrow{y_p}\right)$, alors $F + G = \text{Vect}\left(\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_n}, \overrightarrow{y_1}, \ldots, \overrightarrow{y_p}\right)$.

Démonstrations exigibles :

- Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
- Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercices traités en classe :

Exercice 1. On note F est l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$$

d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a

$$F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2y+3z=0 \text{ et } x-y-z=0\right\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$.

Exercice 2. On note $\mathscr{H}$ l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'+xy=0 \ (H).$$

Montrer que $\mathscr{H}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\cdot)$.

Exercice 3. Soit $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-2y+z=0\right\}$.

Montrer que $F=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Exercice 4. Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

1. $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y=1\right\}$.
2. $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\leq y\right\}$.
3. $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=0\right\}$.
4. $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=y\right\}$.
5. $\{(x,2x,3x) \mid x\in\mathbb{R}\}$.
6. $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=0\right\}$.
7. $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\right\}$.
8. $E_1=\{P\in\mathbb{R}[X] \mid P(0)=P(2)\}$.
9. $E_2=\{P\in\mathbb{R}[X] \mid P'(0)=2\}$.
10. Pour $A\in\mathbb{R}[X]$ non nul fixé, $E_3=\{P\in\mathbb{R}[X] \mid A \text{ divise } P\}$.
11. E_4, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'+a(x)y=0$, où a est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
12. E_5, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'+a(x)y=x$, où a est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Montrer que les ensembles suivants, munis des opérations classiques, sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

1. l'ensemble des nombres complexes imaginaires purs.
2. l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
3. l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})=\left\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M^T=M\right\}$ des matrices symétriques de taille $n\times n$.
5. l'ensemble des fonctions paires (impaires) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
6. l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ (avec $n\in\mathbb{N}$ fixé).

Exercice 6. Montrer les assertions suivantes :

1. Dans $\left(\mathbb{R}^2,+,\cdot\right)$, les vecteurs $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ constituent une famille libre.
2. Dans $(\mathbb{R}[X],+,\cdot)$, les polynômes $P_1=1$, $P_2=1+X$ et $P_3=1+X+X^2$ sont linéairement indépendants.
3. Dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$, les matrices suivantes constituent une famille libre :
$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad C=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}.$$
4. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, les fonctions cos et sin sont linéairement indépendantes .