Programme de colles n°24

Du 08/04 au 12/04

Espaces vectoriels de dimension finie

Documents utilisés en classe :

`https://tsimaths.lycee-louis-vincent.fr/cours17.pdf`

`https://tsimaths.lycee-louis-vincent.fr/TD17.pdf`

A. Espaces vectoriels

1. Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels (reprise du programme de colles précédent)
2. Familles finies de vecteurs
   Famille libre, famille liée.
   Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.
   Bases. Exemples usuels : bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
   Coordonnées dans une base. Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur x dans une base $\mathscr{B}$: $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$.

B. Espaces vectoriels de dimension finie

1. Dimension finie
   Dimension. Dimensions et bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
   Théorème. *Soit E un espace vectoriel de dimension n. Toute famille libre de n vecteurs de E constitue une base de E.*

Exercices traités :

Exercice 1

Déterminer une base et la dimension des sous-espaces vectoriels suivants :

1. Dans $\mathbb{R}^3$: on note
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 4a-b \\ 2a-b \\ 6a-b \end{pmatrix} \middle| (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
2. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: on note
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & a-2b \\ 3c & a \end{pmatrix} \middle| (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$
3. Dans $\mathbb{R}[X]$: on note
$$H = \left\{ \alpha X^3 + (\alpha-\beta)X^2 + 2\alpha X - \beta \;\middle|\; (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 2

Déterminer une base et la dimension des sous-espaces vectoriels suivants :

1. Dans $\mathbb{R}^3$: on note
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x - y - z = 0 \text{ et } x + y - 3z = 0 \right\}.$$
2. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: on note
$$G = \{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) | \, AM = MA \},$$
où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Dans $\mathbb{R}[X]$: on note
$$H = \{ P \in \mathbb{R}_2[X] | \, P(1) = 0 \}.$$

Exercice 3

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
On note $\mathscr{F}$ la famille (v_1, v_2, v_3). Montrer que $\mathscr{F}$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées du vecteur $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{F}$.

Exercice 4

Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère les polynômes $P_1 = 1$, $P_2 = 1 + X$ et $P_3 = 1 + X + X^2$.
1. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3)$ constitue une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer les coordonnées du polynôme $R = 3 + X + 2X^2$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 5

Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^4$, préciser lesquels sont des sous-espaces vectoriels et lorsque c'est le cas, en donner une base :
1. $\left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - y + t = 0\right\}$.
2. $\left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2z + t = 1\right\}$.
3. $\left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + t = 0 \text{ et } 2x + y - z = 0\right\}$.
4. $\left\{(3a + b, a - b, a + 5b, 2a + b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Exercice 6

Vérifier que les ensembles suivants, munis des opérations classiques, sont des $\mathbb{R}-$espaces vectoriels et déterminer une base de ces espaces :
1. $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + y = y + z = 0\right\}$.
2. $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tels que } P(X) = P(1 - X)\}$.
3. $\left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ telles que } u_n + u_{n+1} = 0\right\}$.