Programme de colles n°25

Du 15/04 au 19/04

Espaces vectoriels de dimension finie & Applications linéaires

Tout le chapitre 17 est au programme : cours17.pdf TD17.pdf

Début du chapitre 18 : cours18.pdf TD18.pdf

Hors programme cette semaine : Projections - Symétries - Représentation matricielle d'une application linéaire

A. Espaces vectoriels

1. Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels (reprise du programme de colles précédent)
2. Familles finies de vecteurs
   Famille libre, famille liée.
   Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.
   Bases. Exemples usuels : bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
   Coordonnées dans une base. Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur x dans une base $\mathscr{B}$: $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$.

B. Espaces vectoriels de dimension finie

1. Dimension finie
   Définition.
   Théorème de la base extraite. Théorème de la base incomplète.
   Dimension. Dimensions de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
   Théorème. *Soient E est de dimension n et $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs de E. Alors $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathscr{F}$ est libre, si et seulement si $\mathscr{F}$ est génératrice.*

2. Sous-espaces vectoriels de dimension finie
   Théorème. *Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors F est de dimension finie et* $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. *De plus, $F = E$ si et seulement si* $\dim(F) = \dim(E)$.
   Formule de Grassmann. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors :
   $$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

3. Somme de deux sous-espaces vectoriels
   Définition de $F+G$. Définition de « F et G sont en somme directe ».
   Caractérisation somme directe. $F \oplus G \iff F \cap G = \{0\}$.

4. Sous-espaces vectoriels supplémentaires
   Définition de $F \oplus G = E$.

Caractérisation.

$$\begin{aligned} F \oplus G = E &\iff F + G = E \quad \text{et} \quad F \cap G = \{0\} \\ &\iff \dim(F+G) = \dim(E) \quad \text{et} \quad F \cap G = \{0\}\,. \end{aligned}$$

C. Applications linéaires - Noyau et image d'une application linéaire

1. Définitions et opérations

1. DÉFINITIONS
   Applications linéaires (notation : $\mathscr{L}(E,F)$), endomorphismes (notation : $\mathscr{L}(E)$), isomorphismes et automorphismes (notation : $GL(E)$).
2. OPÉRATIONS SUR LES APPLICATIONS LINÉAIRES
   Combinaisons linéaires et composées d'applications linéaires.
   Réciproque d'un isomorphisme, composée d'isomorphismes.

2. Image et noyau d'une application linéaire

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. IMAGE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE
   - Définir $\mathrm{Im}(f)$,
   - Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$,
   - Interpréter le résultat (Caractérisation : f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im} f = F$.).
2. NOYAU D'UNE APPLICATION LINÉAIRE
   - Définir de $\mathrm{Ker} f$:

   $$\mathrm{Ker} f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{\, x \in E \mid f(x) = 0_F \}\,.$$

   - Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$,
   - Interpréter le résultat (Caractérisation : f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$.)