Feuille d'exercices n°10
Équations différentielles

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 1. Vérifier que la fonction φ est solution de l'équation différentielle donnée et déterminer la constante C avec la condition initiale donnée.

1. $(E_1) \; : \; xy' = 3y \quad , \quad \varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{+\star} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Cx^3 \end{array} \quad , \quad \varphi(2) = 32 \quad .$
2. $(E_2) \; : \; y' + 3x^2 y = 0 \quad , \quad \varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\mathrm{e}^{-x^3} \end{array} \quad , \quad \varphi(2) = 1 \quad .$
3. $(E_3) \; : \; y' + 2y + 2 = 0 \quad , \quad \varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\mathrm{e}^{-2x} - 1 \end{array} \quad , \quad \varphi(0) = -1 \quad .$
4. $(E_4) \; : \; y' + \frac{2}{x} y = 5x^2 \quad , \quad \varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{-\star} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 + \frac{C}{x^2} \end{array} \quad , \quad \varphi(-1) = 2 \quad .$

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' - 3y = 0.$
2. $y' - y = 1.$
3. $y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}.$
4. $y' + y = \cos(x) + \sin(x).$
5. $y' = \frac{1}{1+x^2}.$
6. $y' = -2xy + \mathrm{e}^{x-x^2}.$
7. $y' = y + \mathrm{e}^x \sin(2x).$
8. $(x^2+1)y' + 2xy = 2x.$
9. $(1+x^2)^2 y' + 2x(1+x^2)y = 1.$

Exercice 3. Résoudre sur les intervalles spécifiés les équations différentielles suivantes :

1. $\sin(x)y' - \cos(x)y = \sin(x)^2 \quad \text{sur} \quad]0, \pi[.$
2. $\sqrt{1-x^2}y' + y = 0 \quad \text{sur} \quad]0, 1[.$
3. $(x^2-1)y' + 2xy = 0 \quad \text{sur} \quad]-1, 1[.$
4. $xy' + y + x\mathrm{e}^x = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^{+\star}.$
5. $xy' + y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{sur} \quad]-1, 0[.$
6. $y' + \tan(x)y = \sin(2x) \quad \text{sur} \quad]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$

Exercice 4. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont les fonctions

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{C+x}{1+x^2} \end{array} , \text{ avec } C \in \mathbb{R},$$

seraient les solutions.

Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Exercice 5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. $y'' - 4y' + 4y = 0.$
3. $y'' + y = 0.$
4. $y'' + y' - 2y = 0.$
5. $y'' + 2y' + 5y = 0.$
6. $y'' + y' + y = 0.$

Exercice 6. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = 4e^{3x}$
2. $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$.
3. $y'' - 2y' + y = 6e^x$.
4. $y'' + y' + y = e^x$.
5. $y'' - y = e^x$.
6. $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$.

Exercice 7. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - y = \cos(x)$.
2. $y'' + y = \cos(x)$.
3. $y'' + y = \sin(x)$.
4. $y'' - 4y' + 4y = 8\sin(2x)$.
5. $y'' - 3y' + 2y = \cos(x)e^x$.
6. $y'' + 2y = 2\sin(x)e^x$.

Exercice 8. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $\begin{cases} y'' - y = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y'' - 2y' + y = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y'' + y = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

Exercice 9. Soient ω et ω_0 deux réels strictement positifs tels que $\omega \neq \omega_0$. Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 x)$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Divers

Exercice 10. Déterminer les fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$f'(x) + f(x) = f(0) + f(1).$$

Exercice 11. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(-x) = e^x.$$

Exercice 12. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad y'' + 3y' + 2y = \tfrac{x-1}{x^2 e^x} \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^{+\star}.$$

1. Soit φ une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$, deux fois dérivable. On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ telle que

   $$\psi(x) = \varphi(x)e^x.$$

   Montrer que φ est solution de (E) si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star},\ \psi''(x) + \psi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$.
2. Résoudre l'équation (E).