Feuille d'exercices n°10
Équations différentielles

Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exercice 1. Vérifier que la fonction φ est solution de l'équation différentielle donnée et déterminer la constante C avec la condition initiale donnée.

1. $(E_1)\ :\ xy' = 3y$, $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+\star} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Cx^3 \end{array}$, $\varphi(2) = 32$.
2. $(E_2)\ :\ y' + 3x^2y = 0$, $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\mathrm{e}^{-x^3} \end{array}$, $\varphi(2) = 1$.
3. $(E_3)\ :\ y' + 2y + 2 = 0$, $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\mathrm{e}^{-2x} - 1 \end{array}$, $\varphi(0) = -1$.
4. $(E_4)\ :\ y' + \frac{2}{x}y = 5x^2$, $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{-\star} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 + \frac{C}{x^2} \end{array}$, $\varphi(-1) = 2$.

1. On vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$, $x\varphi'(x) = 3\varphi(x)$.
   $\varphi(2) = 32 \iff C \times 2^3 = 32 \iff C = 4$.
   Conclusion : $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+\star} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 4x^3 \end{array}$.
2. On vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) + 3x^2\varphi(x) = 0$.
   $\varphi(2) = 1 \iff C\mathrm{e}^{-2^3} = 1 \iff C = \mathrm{e}^8$.
   Conclusion : $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{8-x^3} \end{array}$.
3. On vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) + 2\varphi(x) + 2 = 0$.
   $\varphi(0) = -1 \iff C\mathrm{e}^{-2\times 0} - 1 = -1 \iff C = 0$.
   Conclusion : $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -1 \end{array}$.
4. On vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}^{-\star}$, $\varphi'(x) + \frac{2}{x}\varphi(x) = 5x^2$.
   $\varphi(-1) = 2 \iff (-1)^3 + \frac{C}{(-1)^2} = 2 \iff C = 3$.
   Conclusion : $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{-\star} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 + \frac{3}{x^2} \end{array}$.

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' - 3y = 0$.
2. $y' - y = 1$.
3. $y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}$.
4. $y' + y = \cos(x) + \sin(x)$.
5. $y' = \frac{1}{1+x^2}$.
6. $y' = -2xy + \mathrm{e}^{x-x^2}$.
7. $y' = y + \mathrm{e}^x \sin(2x)$.
8. $(x^2+1)y' + 2xy = 2x$.
9. $(1+x^2)^2 y' + 2x(1+x^2)y = 1$.

1. $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\mathrm{e}^{3x} \end{array}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}$
2. $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\mathrm{e}^{x} - 1 \end{array}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}$
3. $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-x} \end{array}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}$
4. $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\mathrm{e}^{-x} + \sin(x) \end{array}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}$
5. $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C + \arctan(x) \end{array}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}$
6. $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\mathrm{e}^{-x^2} + \mathrm{e}^{x-x^2} \end{array}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}$
7. $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{2}\cos(2x)\mathrm{e}^x \end{array}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}$
8. $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{C}{1+x^2} + 1 \end{array}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}$
9. $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{C}{1+x^2} + \frac{\arctan(x)}{1+x^2} \end{array}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}$

Exercice 3. Résoudre sur les intervalles spécifiés les équations différentielles suivantes :

1. $\sin(x)y' - \cos(x)y = \sin(x)^2$ sur $]0, \pi[$.
2. $\sqrt{1-x^2}y' + y = 0$ sur $]0, 1[$.
3. $(x^2-1)y' + 2xy = 0$ sur $]-1, 1[$.
4. $xy' + y + x\mathrm{e}^x = 0$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
5. $xy' + y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1, 0[$.
6. $y' + \tan(x)y = \sin(2x)$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

1. $(E) \quad y' - \frac{\cos(x)}{\sin(x)}y = \sin(x)$.
   $a(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, $A(x) = -\ln(|\sin(x)|) = -\ln(\sin(x))$ et $b(x) = \sin(x)$.
   On note (H) l'équation homogène associée : $(H) \quad y' - \frac{\cos(x)}{\sin(x)}y = 0$.
   Solutions de (H) : $y_H(x) = C\mathrm{e}^{-A(x)} = C\sin(x)$.
   Solution particulière : $y_P(x) = C(x)\sin(x)$ avec $C'(x) = b(x)\mathrm{e}^{A(x)} = 1$.
   $C(x) = x$ convient et $y_P(x) = x\sin(x)$ est une solution de (E).
   Solutions de (E) : $y(x) = y_P(x) + y_H(x)$.
   $$\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc}]0, \pi[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x+C)\sin(x) \end{array}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$
2. $(E) \quad y' + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = 0$.
   $a(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $A(x) = \arcsin(x)$ et $b(x) = 0$.
   $$\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc}]0, 1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\mathrm{e}^{-\arcsin(x)} \end{array}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$
3. $(E) \quad y' + \frac{2x}{x^2-1}y = 0$.
   $a(x) = \frac{2x}{x^2-1}$, $A(x) = \ln\left(|x^2-1|\right) = \ln\left(1-x^2\right)$.
   $$\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc}]-1, 1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{C}{1-x^2} \end{array}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. $(E)\quad y'+\frac{1}{x}y=-\mathrm{e}^x$.
$a(x)=\frac{1}{x}$, $A(x)=\ln(|x|)=\ln(x)$ et $b(x)=-\mathrm{e}^x$.
$y_H(x)=C\mathrm{e}^{-A(x)}=\frac{C}{x}$.
On cherche $y_P(x)$ une solution de (E_4) sous la forme $y_P(x)=\frac{C(x)}{x}$.
Alors $C'(x)=b(x)\mathrm{e}^{A(x)}=-x\mathrm{e}^x$. Pour déterminer une primitive de $C'(x)$, on effectue une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int -x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= -x\mathrm{e}^x-\int -\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\\ &= -x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x.\end{aligned}$$

$C(x)=-x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x$ convient, et $y_P(x)=\frac{-x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x}{x}$ est une solution de (E).

$$\mathscr{S}=\left\{\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{C-x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x}{x}\end{array}\quad,\quad C\in\mathbb{R}\right\}.$$

5. $(E)\quad y'+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$.
$a(x)=\frac{1}{x}$, $A(x)=\ln(|x|)=\ln(-x)$ et $b(x)=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$.
Solutions de (H), équation homogène associée : $y_H(x)=C\mathrm{e}^{-A(x)}=\frac{C}{-x}$.
Solution particulière de (E) : $y_P(x)=-\frac{C(x)}{x}$ avec
$C'(x)=b(x)\mathrm{e}^{A(x)}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
$C(x)=\arccos(x)$ convient et $y_P(x)=-\frac{\arccos(x)}{x}$ est une solution de (E).

$$\mathscr{S}=\left\{\begin{array}{ccc}]-1,0[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\frac{C+\arccos(x)}{x}\end{array}\quad,\quad C\in\mathbb{R}\right\}.$$

6. $(E)\quad y'+\tan(x)y=\sin(2x)$.
$a(x)=\tan(x)$, $A(x)=-\ln(|\cos(x)|)=-\ln(\cos(x))$ et $b(x)=\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$.
Solutions de (H), équation homogène associée : $y_H(x)=C\mathrm{e}^{-A(x)}=C\cos(x)$.
Solution particulière de (E) : $y_P(x)=C(x)\cos(x)$ avec
$C'(x)=b(x)\mathrm{e}^{A(x)}=2\sin(x)$.
$C(x)=-2\cos(x)$ convient et $y_P(x)=-2\cos^2(x)$ est une solution de (E).

$$\mathscr{S}=\left\{\begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\cos(x)-2\cos^2(x)\end{array}\quad,\quad C\in\mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 4. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont les fonctions

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \frac{C+x}{1+x^2}\end{array},\ \text{avec } C\in\mathbb{R},$$

seraient les solutions.

Les fonctions $x\mapsto C+x$ et $x\mapsto 1+x^2$ sont dérivables. De plus $1+x^2\neq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. La fonction f est donc dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1\times(1+x^2)-(C+x)\times 2x}{(1+x^2)^2}\\ &= \frac{1}{1+x^2}-\frac{2x}{(1+x^2)}\times\frac{C+x}{1+x^2}\\ &= \frac{1}{1+x^2}-\frac{2x}{1+x^2}\times f(x).\end{aligned}$$

On en déduit que f est solution de l'équation différentielle $y'=\frac{1}{1+x^2}-\frac{2x}{1+x^2}y$, c'est-à-dire

$$y'+\frac{2x}{1+x^2}y=\frac{1}{1+x^2}.$$

Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Exercice 5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$
2. $y'' - 4y' + 4y = 0.$
3. $y'' + y = 0.$
4. $y'' + y' - 2y = 0.$
5. $y'' + 2y' + 5y = 0.$
6. $y'' + y' + y = 0.$

1. $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{2x} \end{array} , \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

2. $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (Ax+B)\mathrm{e}^{2x} \end{array} , \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

3. $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\cos(x) + B\sin(x) \end{array} , \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

4. $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{-2x} \end{array} , \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

5. $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-x}(A\cos(2x) + B\sin(2x)) \end{array} , \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

6. $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) \end{array} , \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Exercice 6. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = 4\mathrm{e}^{3x}$
2. $y'' - 3y' + 2y = 2\mathrm{e}^{x}.$
3. $y'' - 2y' + y = 6\mathrm{e}^{x}.$
4. $y'' + y' + y = \mathrm{e}^{x}.$
5. $y'' - y = \mathrm{e}^{x}.$
6. $y'' - 4y' + 4y = 3\mathrm{e}^{2x}.$

1. $y_H(x) = A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{2x}.$
   $\gamma = 3$ n'est pas une racine de $P(x)$, polynôme caractéristique associé à (E_1).
   On cherche donc $y_P(x)$ solution de (E_1) sous la forme $y_P(x) = C\mathrm{e}^{3x}$.
   y_P est solution de (E_1)
   $\iff y_P''(x) - 3y_P'(x) + 2y_P(x) = 4\mathrm{e}^{3x}$
   $\iff C = 2.$
   Donc $y_P(x) = 2\mathrm{e}^{3x}$.
   Conclusion :
   $$\mathscr{S}_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{3x} \end{array} , \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
2. $y_H(x) = A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{2x}.$
   $\gamma = 1$ est une racine simple de $P(x)$, polynôme caractéristique associé à (E_2).
   On cherche donc $y_P(x)$ solution de (E_2) sous la forme $y_P(x) = Cx\mathrm{e}^{x}$.
   y_P est solution de (E_2)
   $\iff y_P''(x) - 3y_P'(x) + 2y_P(x) = 2\mathrm{e}^{x}$
   $\iff C = -2.$
   Donc $y_P(x) = -2x\mathrm{e}^{x}$.
   Conclusion :
   $$\mathscr{S}_2 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^{x} \end{array} , \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
3. $y_H(x) = (Ax+B)\mathrm{e}^{x}.$
   $\gamma = 1$ est une racine double de $P(x)$, polynôme caractéristique associé à (E_3).
   On cherche donc $y_P(x)$ solution de (E_3) sous la forme $y_P(x) = Cx^2\mathrm{e}^{x}$.
   y_P est solution de (E_3)
   $\iff y_P''(x) - 2y_P'(x) + y_P(x) = 6\mathrm{e}^{x}$

$\iff C = 3$.
Donc $y_P(x) = 3x^2 \mathrm{e}^x$.
Conclusion :

$$\mathscr{S}_3 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (Ax+B)\mathrm{e}^x + 3x^2\mathrm{e}^x \end{array} \quad , \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

4. $y_H(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right)$.
$\gamma = 1$ n'est pas une racine de $P(x)$, polynôme caractéristique associé à (E_4).
On cherche donc $y_P(x)$ solution de (E_4) sous la forme $y_P(x) = C\mathrm{e}^x$.
y_P est solution de (E_4)
$\iff y_P''(x) + y_P'(x) + y_P(x) = \mathrm{e}^x$
$\iff C = \frac{1}{3}$.
Donc $y_P(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^x$.
Conclusion :

$$\mathscr{S}_4 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) + \frac{1}{3}\mathrm{e}^x \end{array} \quad , \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

5. $$\mathscr{S}_5 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x \end{array} \quad , \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

6. $$\mathscr{S}_6 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (Ax+B)\mathrm{e}^{2x} + \frac{3}{2}x^2\mathrm{e}^{2x} \end{array} \quad , \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 7. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - y = \cos(x)$.
2. $y'' + y = \cos(x)$.
3. $y'' + y = \sin(x)$.
4. $y'' - 4y' + 4y = 8\sin(2x)$.
5. $y'' - 3y' + 2y = \cos(x)\mathrm{e}^x$.
6. $y'' + 2y = 2\sin(x)\mathrm{e}^x$.

1. $$\mathscr{S}_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\cos(x) \end{array} \quad , \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2. $$\mathscr{S}_2 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\cos(x) + B\sin(x) + \frac{1}{2}x\sin(x) \end{array} \quad , \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

3. $$\mathscr{S}_3 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\cos(x) + B\sin(x) - \frac{1}{2}x\cos(x) \end{array} \quad , \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

4. $$\mathscr{S}_4 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (Ax+B)\mathrm{e}^{2x} + \cos(2x) \end{array} \quad , \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

5. $$\mathscr{S}_5 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\mathrm{e}^x + B\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x))\mathrm{e}^x \end{array} \quad , \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

6. $$\mathscr{S}_6 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\cos(\sqrt{2}x) + B\sin(\sqrt{2}x) + \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x))\mathrm{e}^x \end{array} \quad , \quad (A, \right.$$

Exercice 8. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1. $\begin{cases} y'' - y = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} y'' - 2y' + y = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} y'' + y = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

1. $$\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x}{2} \end{array} \right\}.$$

2. $$\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (2x+1)\mathrm{e}^x \end{array} \right\}.$$

3. $$\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array} \right\}.$$

Exercice 9. Soient ω et ω_0 deux réels strictement positifs tels que $\omega \neq \omega_0$. Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 x)$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

On note (E) l'équation $y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 x)$ et (H) son équation homogène associée : $y'' + \omega^2 y = 0$.

Solutions de (H) : $y_H(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$.

Solution particulière de (E) : $y_P(x) = \mathrm{Re}(z_P(x))$ où z_P est une solution de l'équation différentielle $z'' + \omega^2 z = \mathrm{e}^{i\omega_0 x}$ $(\tilde{E})$. On cherche $z_p(x)$ sous la forme $z_P(x) = C\mathrm{e}^{i\omega_0 x}$ (car $\omega_0 \neq \omega$) avec C à déterminer.

$$\begin{aligned} z_P \text{ est solution de } (\tilde{E}) &\iff z_P''(x) + \omega^2 z_P(x) = \mathrm{e}^{i\omega_0 x} \\ &\iff C = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}. \end{aligned}$$

Donc $z_P(x) = \frac{1}{\omega^2-\omega_0^2}\mathrm{e}^{i\omega_0 x}$ et $y_P(x) = \mathrm{Re}(z_P(x)) = \frac{1}{\omega^2-\omega_0^2}\cos(\omega_0 x)$.

Solutions de (E) :

$$\begin{aligned} y(x) &= y_H(x) + y_P(x) \\ &= A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) + \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}\cos(\omega_0 x). \end{aligned}$$

Conditions initiales :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} A + \frac{1}{\omega^2-\omega_0^2} = 1 \\ B\omega = 0 \end{cases} \\ &\iff A = 1 - \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad \text{et} \quad B = 0. \end{aligned}$$

Conclusion : $y(x) = \left(1 - \frac{1}{\omega^2-\omega_0^2}\right)\cos(\omega x) + \frac{1}{\omega^2-\omega_0^2}\cos(\omega_0 x)$.

Divers

Exercice 10. Déterminer les fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\text{pour tout } x \in [0,1],\ f'(x) + f(x) = f(0) + f(1).$$

Analyse : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$ pour tout $x \in [0,1]$. Alors $\forall x \in [0,1]$, $f'(x) = f(0) + f(1) - f(x)$ et f' est dérivable en tant que somme de fonctions dérivable. On obtient alors pour tout $x \in [0,1]$, $f''(x) + f'(x) = 0$. D'où $f(x) = A\mathrm{e}^{-1\times x} + B\mathrm{e}^{0\times x} = A\mathrm{e}^{-x} + B$, avec A et B des constantes réelles. Enfin

$$\begin{aligned} f'(x) + f(x) = f(0) + f(1) &\iff B = (A + B) + (A\mathrm{e}^{-1} + B) \\ &\iff B = -A(1 + \mathrm{e}^{-1}). \end{aligned}$$

Donc f est de la forme $f(x) = A\left(\mathrm{e}^{-x} - 1 - \mathrm{e}^{-1}\right)$ avec $A \in \mathbb{R}$.

Synthèse : Réciproquement on vérifie que toute fonction f de la forme $f(x) = A\left(\mathrm{e}^{-x} - 1 - \mathrm{e}^{-1}\right)$ convient, c'est-à-dire est dérivable et satisfait pour tout $x \in [0,1]$, $f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$.

Exercice 11. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^x.$$

Analyse : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^x - f(-x)$, et f' est donc dérivable (en tant que somme de deux fonctions dérivables).

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[f'(x) + f(-x)]' = \mathrm{e}^x$
$\implies$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) - f'(-x) = \mathrm{e}^x$
$\implies$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) - (\mathrm{e}^{-x} - f(x)) = \mathrm{e}^x$
$\implies$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$.

f est donc solution d'une équation différentielle du second degré : $y'' + y = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ (E).

Solutions de (H) : $y_H(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$.

Solutions particulière de (E) : $y_P(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$ (prinicipe de superposition).

Donc f est de la forme $f(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ avec A et B des constantes réelles. Enfin

$$f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \iff B = -A$$

donc f est de la forme $f(x) = A(\cos(x) - \sin(x)) + \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ avec $A \in \mathbb{R}$.

Synthèse : Réciproquement on vérifie que toute fonction f de la forme $f(x) = A(\cos(x) - \sin(x)) + \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ avec $A \in \mathbb{R}$ convient, c'est-à-dire est dérivable et satisfait pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(-x) = \mathrm{e}^x$.

Exercice 12. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad y'' + 3y' + 2y = \tfrac{x-1}{x^2\mathrm{e}^x} \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^{+\star}.$$

1. Soit φ une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$, deux fois dérivable. On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ telle que

$$\psi(x) = \varphi(x)\mathrm{e}^x.$$

   Montrer que φ est solution de (E) si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$, $\psi''(x) + \psi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$.

2. Résoudre l'équation (E).

1. $\forall x \in \mathbb{R}^{+\star}$, $\psi''(x) + \psi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$
   $\iff$ $\forall x \in \mathbb{R}^{+\star}$, $[\varphi(x)\mathrm{e}^x]'' + [\varphi(x)\mathrm{e}^x]' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$
   $\iff$ $\forall x \in \mathbb{R}^{+\star}$, $[\varphi''(x) + 2\varphi'(x) + \varphi(x)]\,\mathrm{e}^x + [\varphi'(x) + \varphi(x)]\,\mathrm{e}^x = \frac{x-1}{x^2}$
   $\iff$ $\forall x \in \mathbb{R}^{+\star}$, $\varphi''(x) + 3\varphi'(x) + 2\varphi(x) = \frac{x-1}{x^2\mathrm{e}^x}$
   $\iff$ φ est solution de (E).
2. On note (H) l'équation homogène associée à (E) : $y'' + 3y' + 2y = 0$.

   Les solutions de (H) sont les fonctions $y_H(x) = A\mathrm{e}^{-2x} + B\mathrm{e}^{-x}$, avec A et B des constantes réelles.
   On constate que la fonction ln est une solution de $y'' + y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$.
   D'après la question précédente, $\varphi(x) = \frac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x}$ est une solution de (E).
   Conclusion : $\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\mathrm{e}^{-2x} + B\mathrm{e}^{-x} + \frac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x} \end{array}, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.