Feuille d'exercices n°11
Géométrie élémentaire de l'espace

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des points de l'espace. On munit $\mathscr{E}$ d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Produit scalaire, produit vectoriel et produit mixte

Exercice 1. Soient A, B, C et D quatre points de $\mathscr{E}$ de coordonnées respectives $(3, 0, -1)$, $(2, 1, -1)$, $(4, 2, 5)$ et $(3, 4, 3)$ dans $\mathcal{R}$.

1. Calculer les distances AB, AC et BC. Que peut-on en déduire ?
2. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$.
3. Déterminer les produits vectoriels $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AD}$.
4. Calculer le produit mixte $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]$. En déduire le volume du parallélépipède engendré par $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Exercice 2. Déterminer une base orthonormale directe de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ dont le premier vecteur est colinéaire au vecteur $(1, 2, 2)$.

Exercice 3. Pour quelles valeurs de a les vecteurs $(1, 0, a)$, $(a, 1, 0)$ et $(0, a, 1)$ constituent-ils une base de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$?

Exercice 4. Soient A, B et C trois points de $\mathscr{E}$. Montrer que :

$$\forall M \in \mathscr{E},\ \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}.$$

Plans et droites

Exercice 5. Les points A, B et C définissent-ils un plan ? Si oui, en donner une représentation paramétrique, puis une équation cartésienne.

1. $A\,(2, 4, 0)$; $B\,(0, 6, 0)$; $C\,(6, 0, 0)$.
2. $A\,(1, 2, 0)$; $B\,(-2, 1, -4)$; $C\,(0, 3, 0)$.

Exercice 6. Déterminer une équation cartésienne et une représentation paramétrique du plan $\mathscr{P}$:

1. passant par $A(1, 0, 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1, -1, 2)$;
2. passant par $A(0, 1, 1)$ et engendré par les vecteurs $\vec{u}(1, -1, 0)$ et $\vec{v}(0, 0, 2)$;
3. passant par $A\,(1, -2, 3)$ et parallèle au plan $\mathscr{Q}$ d'équation $5x + 3y - z + 1 = 0$;
4. plan médiateur du segment $[AB]$, avec $A(2, 0, -1)$ et $B(4, -2, 3)$.

Exercice 7. Montrer que les points $A\,(2, -3, 4)$, $B\,(1, 0, 2)$, $C\,(2, -1, 2)$ et $D\,(1, -1, 3)$ sont coplanaires.

Exercice 8. Déterminer une représentation paramétrique, ainsi qu'un système d'équations cartésiennes des droites :

1. $\mathscr{D}_1$ passant par le point $A(1, 2, -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1, -2, 4)$;
2. $\mathscr{D}_2$ passant par les points $B(1, 2, -3)$ et $C(0, 3, -4)$;
3. $\mathscr{D}_3$ passant par le point $D(2, 0, 1)$ et parallèle à $\mathscr{D}_2$.

Parallélisme et alignement

Exercice 9. Les deux ensembles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ donnés par les équations suivantes sont-ils parallèles ? Préciser la nature de ces ensembles.

1. $\mathcal{E}_1 : 4x-2y+6z-1=0$ et $\mathcal{E}_2 : 6x-3y+9z=0$.
2. $\mathcal{E}_1 : x-y+z-1=0$ et $\mathcal{E}_2 : -x-y-z+1=0$.
3. $\mathcal{E}_1 : \begin{cases} x=t \\ y=-1-3t \\ z=2-2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$ et $\mathcal{E}_2 : \begin{cases} x=-1 \\ y=1+3t \\ z=1+2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.
4. $\mathcal{E}_1 : \begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=-t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$ et $\mathcal{E}_2 : 2x+y-z+2=0$.

Exercice 10. $ABCDEFGH$ est un cube.

1. Montrer que les plans (BDE) et (CFH) sont parallèles.
2. On note P le centre de gravité du triangle BEG. Montrer que les points D, F et P sont alignés.

Orthogonalité

Exercice 11. Les deux ensembles suivants sont-ils perpendiculaires ?

1. $\mathscr{P}_1 : 4x+y-2z-1=0$ et $\mathscr{P}_2 : x+2y+3z-2=0$.
2. $\mathscr{P}_3 : x+2y-z-3=0$ et $\Delta : \begin{cases} x=1-2t \\ y=3-4t \\ z=3+2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.

Exercice 12. $ABCDEFGH$ est un cube. Montrer que la droite (AG) est perpendiculaire au plan (BDE).

Exercice 13. Soit Δ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$, contenue dans un plan $\mathscr{P}$, et A un point n'appartenant pas à $\mathscr{P}$. On note H le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$, et L le projeté orthogonal de H sur Δ. Montrer que les droites (AL) et Δ sont perpendiculaires.

Intersection d'ensembles de points

Exercice 14. Déterminer l'intersection des ensembles suivants :

1. $\mathscr{P}_1 : x-2y+2z+2=0$ et $\mathscr{P}_2 : 3x+y-z+1=0$.
2. $\mathscr{P}_1 : y+z+2=0$ et $\mathscr{P}_2 : x-y-1=0$.
3. $\mathscr{D}_1 : \begin{cases} x=t+1 \\ y=2t-1 \\ z=-t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$ et $\mathscr{D}_2 : \begin{cases} x=t \\ y=-t+3 \\ z=-t+1 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.
4. $\mathscr{D}$, la droite passant par $A(1,-2,-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-2,3,1)$, et $\mathscr{P}$, le plan d'équation $3x-5y+z-4=0$.
5. $\mathscr{D}$, la droite passant par $A(1,2,3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1,-1,1)$, et $\mathscr{P}$, le plan d'équation $x+2y+z=0$.
6. $\mathscr{P} : x-y+z+2=0$, $\mathscr{Q} : 2x-4y+6z+3=0$ et $\mathscr{R} : x-2y+3z=0$.

Distance d'un point à une droite - Distance d'un point à un plan

Exercice 15. Déterminer la distance :

1. du point $A(1,2,1)$ au plan $\mathscr{P} : x-2y+3z=1$;
2. du point $B(1,2,-1)$ à la droite $\mathscr{D} : \begin{cases} x=1+3t \\ y=2-t \\ z=2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$;
3. du point $C(1,0,2)$ à la droite $\Delta : \begin{cases} 2x-y+z=1 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$.

Exercice 16. Soient A un point de $\mathscr{E}$ de coordonnées $(2,0,1)$ dans $\mathcal{R}$, et $\mathscr{P}$ le plan d'équation $2x+y-z+3=0$.

1. Déterminer la distance du point A au plan $\mathscr{P}$.
2. On note H le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$. Déterminer les coordonnées du point H dans $\mathcal{R}$.
3. Retrouver le résultat de la question 1 en utilisant la question précédente.

Exercice 17. Soient $\mathscr{D}$ la droite passant par $A(1,-2,0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1,1,-1)$, et B le point de coordonnées $(0,1,-2)$ dans $\mathcal{R}$.

1. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de B sur $\mathscr{D}$.
2. En déduire la distance de B à la droite $\mathscr{D}$.

Exercice 18. On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.

1. Déterminer la distance du point G au plan (BDE).
2. En déduire le volume du tétraèdre $BDEG$.

Exercice 19. Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ les plans d'équations respectives $x+y+z-1=0$ et $z=0$ dans $\mathcal{R}$. Montrer que l'ensemble des points équidistants de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ est la réunion de deux plans orthogonaux.

Sphères

Exercice 20.

1. Déterminer le centre et le rayon de la sphère dont une équation cartésienne dans $\mathcal{R}$ est :
   (a) $\mathscr{S}_1 : x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$;
   (b) $\mathscr{S}_2 : x^2+y^2+z^2-4y+6z+12=0$;
   (c) $\mathscr{S}_3 : x^2+y^2+z^2-x+3y-2z+\frac{17}{4}=0$.
2. On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x+y+z-3=0$.
   Déterminer $\mathscr{P}\cap\mathscr{S}_1$, $\mathscr{P}\cap\mathscr{S}_2$ et $\mathscr{P}\cap\mathscr{S}_3$.

Exercice 21. Soient I, J et K trois points de $\mathscr{E}$ de coordonnées respectives $(0,1,-1)$, $(-2,0,0)$ et $(1,0,1)$ dans $\mathcal{R}$. On note $\mathscr{S}$ la sphère de centre I et de rayon 2.
Déterminer l'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et de la droite (JK).