Feuille d'exercices n°12

Ensembles et dénombrement

1 Principe de récurrence

Exercice 1. 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Combien peut-on dessiner de carrés sur un échiquier 8×8 ? Généraliser avec un échiquier de taille $n \times n$.

Exercice 2. 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n^2 + 5)$ est divisible par 6.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 3, \quad u_1 = 5 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n.$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n + 2$.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{(u_{n+1})^2}{u_n}.$$

Conjecturer et démontrer l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 2}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Conjecturer et démontrer l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$.

Exercice 8. Montrer l'inégalité de Bernoulli :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 + nx \leq (1 + x)^n.$$

2 Ensembles et applications

Exercice 9. Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Peut-on écrire

- $a \in E$? • $a \subset E$? • $\{a\} \subset E$?
- $\emptyset \in E$? • $\emptyset \subset E$? • $\{\emptyset\} \subset E$?

Exercice 10. Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que :

1. $A \subset B \iff A \cup B = B$,
2. $A = B \iff A \cap B = A \cup B$,
3. $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$,
4. $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \iff B = C$.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, f(m, n) = mn$.
Soit $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, g(n) = (n, (n+1)^2)$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. g est-elle injective ? surjective ?

Exercice 12. Soient

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{et} \quad g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto n+1 \quad \text{et} \quad n \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n-1 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}.$$

- Étudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité éventuelles de f et de g .
- Préciser $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 13. 1. Décrire l'image directe de $\mathbb{R}$ par la fonction exponentielle.
2. Déterminer l'image réciproque de l'intervalle $[-1; 4]$ par la fonction $f: x \rightarrow x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

3 Sommes et produits

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier les sommes suivantes :

$$1. \sum_{k=1}^{n+1} k - \sum_{k=0}^n k \quad 2. \sum_{k=0}^n (2k+1) \quad 3. \sum_{k=1}^n k(k-1)$$

$$4. \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) \quad 5. \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \quad 6. \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$$

$$7. \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} \quad 8. \sum_{k=0}^n k \cdot k! \quad 9. \prod_{k=1}^n (2k)$$

$$10. \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} \right) \quad 11. \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1} \quad 12. \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$$

4 Factorielles

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer à l'aide de factorielles :

- $2 \times 4 \times \dots \times (2n)$
- $1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)$
- le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} u_n.$$

5 Coefficients binomiaux

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer rapidement les expressions suivantes :

$$1. \binom{6}{3} \quad 2. \binom{n}{1} \quad 3. \binom{n}{n-2} \text{ avec } n \geq 2 \quad 4. \binom{n+p}{n} \text{ avec } p \in \mathbb{N}$$

$$5. 99^3 \quad 6. 1001^2 \quad 7. (n-1)^5 \quad 8. (1+i)^{2016}$$

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

$$1. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k \quad 2. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^{k+1} \quad 3. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \quad 4. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 2^{-k}$$

6 Dénombrement

Exercice 18. Avec les chiffres 0, 1, 2, 3 et 4, combien peut-on écrire d'années au-delà de 2000 en utilisant une seule fois le même chiffre ?

Exercice 19. Au bridge, les mains comptent 13 cartes prises dans un jeu de 52 cartes. Combien de mains comportent :

- un seul roi ?
- aucun roi ?
- au moins un roi ?
- les quatre rois ?
- uniquement des piques ?

Exercice 20. Au poker, on distribue des mains de 5 cartes provenant d'un jeu de 32 cartes. Combien de mains comportent exactement :

- une couleur (c'est-à-dire cinq cartes du même signe) ?
- un carré (c'est-à-dire quatre cartes de la même hauteur) ?
- un full (c'est-à-dire un brelan et une paire) ?
- un brelan (c'est-à-dire trois cartes de même hauteur, mais pas un full) ?
- deux paires (mais pas un carré, ni un brelan) ?
- une paire (c'est-à-dire deux cartes de même hauteur) ?

Exercice 21. Soit $n \geq 3$. On considère un polygone convexe à n côtés.

- Déterminer le nombre de diagonales joignant les sommets.
- Déterminer le nombre d'intersections entre les diagonales si l'on suppose que deux diagonales ne sont jamais parallèles et trois diagonales ne sont jamais concourantes.

Exercice 22. Soient n et p des entiers naturels non nuls tels que $n \leq p$. Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $[[1, n]]$ dans $[[1, p]]$?

Exercice 23. Déterminer le nombre d'anagrammes des mots « cours », « classe » et « ananas ».