Feuille d'exercices n°12
Ensembles et dénombrement

1 Principe de récurrence

Exercice 1. 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Combien peut-on dessiner de carrés sur un échiquier 8×8 ? Généraliser avec un échiquier de taille $n \times n$.

Exercice 2. 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n^2+5)$ est divisible par 6.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 3, \quad u_1 = 5 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n.$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n + 2$.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{(u_{n+1})^2}{u_n}.$$

Conjecturer et démontrer l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 2}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Conjecturer et démontrer l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$.

Exercice 8. Montrer l'inégalité de Bernoulli :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ 1 + nx \leqslant (1+x)^n.$$

2 Ensembles et applications

Exercice 9. Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Peut-on écrire

- $a \in E$?
- $a \subset E$?
- $\{a\} \subset E$?
- $\emptyset \in E$?
- $\emptyset \subset E$?
- $\{\emptyset\} \subset E$?

Exercice 10. Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que :
1. $A \subset B \iff A \cup B = B$,
2. $A = B \iff A \cap B = A \cup B$,
3. $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$,
4. $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \iff B = C.$

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ telle que $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ f(m,n) = mn$.
Soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ g(n) = (n, (n+1)^2)$.
1. f est-elle injective ? surjective ?
2. g est-elle injective ? surjective ?

Exercice 12. Soient

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ n-1 & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases} \end{array}.$$

1. Étudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité éventuelles de f et de g.
2. Préciser $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 13. 1. Décrire l'image directe de $\mathbb{R}$ par la fonction exponentielle.
2. Déterminer l'image réciproque de l'intervalle $[-1;4]$ par la fonction $f : x \to x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

3 Sommes et produits

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Simplifier les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k - \sum_{k=0}^{n} k$	2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1)$	3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$	5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$	6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\tfrac{1}{k}\right)$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \tfrac{k}{(k+1)!}$	8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \cdot k!$	9. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k)$
10. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1+\tfrac{1}{k}\right)$	11. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \tfrac{k}{k+1}$	12. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\tfrac{1}{k^2}\right)$

4 Factorielles

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Exprimer à l'aide de factorielles :
1. $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$
2. $1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)$
3. le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} u_n.$$

5 Coefficients binomiaux

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer rapidement les expressions suivantes :

1. $\binom{6}{3}$	2. $\binom{n}{1}$	3. $\binom{n}{n-2}$ avec $n \geqslant 2$	4. $\binom{n+p}{n}$ avec $p \in \mathbb{N}$
5. 99^3	6. 1001^2	7. $(n-1)^5$	8. $(1+i)^{2016}$

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k$ 2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^{k+1}$ 3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ 4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 2^{-k}$

6 Dénombrement

Exercice 18. Avec les chiffres 0, 1, 2, 3 et 4, combien peut-on écrire d'années au-delà de 2000 en utilisant une seule fois le même chiffre ?

Exercice 19. Au bridge, les mains comptent 13 cartes prises dans un jeu de 52 cartes. Combien de mains comportent :
1. un seul roi ?
2. aucun roi ?
3. au moins un roi ?
4. les quatre rois ?
5. uniquement des piques ?

Exercice 20. Au poker, on distribue des mains de 5 cartes provenant d'un jeu de 32 cartes. Combien de mains comportent exactement :
1. une couleur (c'est-à-dire cinq cartes du même signe) ?
2. un carré (c'est-à-dire quatre cartes de la même hauteur) ?
3. un full (c'est-à-dire un brelan et une paire) ?
4. un brelan (c'est-à-dire trois cartes de même hauteur, mais pas un full) ?
5. deux paires (mais pas un carré, ni un brelan) ?
6. une paire (c'est-à-dire deux cartes de même hauteur) ?

Exercice 21. Soit $n \geqslant 3$. On considère un polygone convexe à n côtés.
1. Déterminer le nombre de diagonales joignant les sommets.
2. Déterminer le nombre d'intersections entre les diagonales si l'on suppose que deux diagonales ne sont jamais parallèles et trois diagonales ne sont jamais concourantes.

Exercice 22. Soient n et p des entiers naturels non nuls tels que $n \leqslant p$. Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$?

Exercice 23. Déterminer le nombre d'anagrammes des mots « cours », « classe » et « ananas ».