Feuille d'exercices n°14
Suites réelles

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 4 - \frac{3}{u_n}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant u_n \leqslant 3$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Que peut-on en déduire ? Déterminer $\lim u_n$.

Exercice 2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par

$$u_1 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n.$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, u_n est strictement positif.
3. Étudier les variations de la suite (u_n).
4. Que peut-on en déduire ?

Exercice 3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$.
3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
3. Que peut-on en déduire ? Déterminer $\lim u_n$.

Exercice 5. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Que peut-on en déduire ? Déterminer $\lim u_n$.

Exercice 6. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_0 = 6 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2.$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,4x - 0,05x^2$. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;8]$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leqslant v_n < v_{n+1} \leqslant 8.$$
3. Que peut-on en déduire ? Déterminer $\lim v_n$.

Exercice 7. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définies par

$$u_n = \frac{n-1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = 1 + \frac{1}{n^2},$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En déduire qu'elles sont convergentes et déterminer leur limite.

Exercice 8. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définies par

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n},$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En utilisant votre calculatrice, donner une approximation de leur limite à 10^{-2} près par défaut.

Exercice 9. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En utilisant votre calculatrice, donner une approximation de leur limite à 10^{-2} près par excès.

Exercice 10. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 2$ et les relations

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1 \leqslant v_n$.
2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

Exercice 11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.
5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

Exercice 12. En utilisant les définitions du cours, montrer que :

1. $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers 0.
2. $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
3. $\left(\sin(n\frac{\pi}{2})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.
4. Si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ.

Exercice 13. Déterminer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque :

1.	$u_n = n^2 + n$	7.	$u_n = 2^n - 3^n$	13.	$u_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$
2.	$u_n = n^2 - n$	8.	$u_n = \frac{2^n+5^n}{7^n}$	14.	$u_n = n - \cos(n)$
3.	$u_n = \frac{2}{n+2}$	9.	$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$	15.	$u_n = \frac{n^2+\sin(n)}{n+5}$
4.	$u_n = \frac{n^2+2}{n+1}$	10.	$u_n = n - \sqrt{n}$	16.	$u_n = n^2 \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor$
5.	$u_n = \frac{4n^2-n}{5n^2+1}$	11.	$u_n = n - \mathrm{e}^n$	17.	$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
6.	$u_n = \frac{3}{0.5^n}$	12.	$u_n = n^2 - \ln(n)$	18.	$u_n = \sqrt{n^2+n+1} - n$

Exercice 14. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

1. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que : $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$.
2. En déduire la limite de la suite $v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Exercice 15. Soient f la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie A : Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide de la fonction f.

1. Calculer les limites de f.
2. Étudier les variations de f, puis tracer $\mathscr{C}_f$.
3. En utilisant $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = x$, placer les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'axe (Ox).
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
6. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Partie B : Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide d'une suite géométrique.

Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \quad \text{et} \quad w_n = \ln(v_n).$$

1. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. En déduire l'expression du terme général de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En déduire l'expression du terme général de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$.
4. Retrouver le résultat de la question $A.6$.

Exercice 16. En utilisant le théorème de la limite monotone, montrer la convergence des suites suivantes :

1. $u_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$.
2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.
3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}$.

Exercice 17. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4} \text{ et } v_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes (on commencera par étudier la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$).
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $8u_n + 3v_n = 44$.
3. En déduire la limite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 18. (Irrationnalité de e) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!} = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

1. Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite.
2. On admet que leur limite commune est e. On veut montrer que $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$. On raisonne pour cela par l'absurde en supposant que $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^\star$.
   Montrer que $u_q < \mathrm{e} < v_q$. Conclure.

Exercice 19. (Moyenne arithmético-géométrique)

1. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$0 < x < y \Longrightarrow x < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < y.$$

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$. On pose $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite et que cette limite appartient à l'intervalle $\left[\sqrt{ab}; \frac{a+b}{2}\right]$.

Exercice 20. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Les propositions A et B sont-elles équivalentes ? L'une d'entre elles implique-t-elle l'autre ?

1. $A : u_n = o(v_n)$ et $B : u_n = O(v_n)$.
2. $A : u_n \sim v_n$ et $B : u_n = O(v_n)$.
3. $A : \forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + w_n,$ où $w_n = o(v_n)$ et $B : u_n \sim v_n$.

Exercice 21. Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$.

1. Montrer que $n^\alpha = o(n^\beta)$.
2. Donner un équivalent simple de $n^\alpha + n^\beta$.

Exercice 22. Utiliser des équivalents ou des croissances comparées pour étudier la convergence des suites suivantes :

1. $u_n = (2n+1)\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$
2. $u_n = \frac{\ln(n+n^2)}{\ln(n)}$
3. $u_n = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)}$
4. $u_n = n^{\frac{1}{\ln n}}$
5. $u_n = \sqrt[n]{n}$
6. $u_n = \dfrac{2^{n+4} - 5^{n+4}}{2^n - 5^n}$
7. $u_n = (5n+1)^2 \ln\left(1 + \frac{1}{3n^2}\right)$
8. $u_n = \left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)^n$
9. $u_n = n^2\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} - 1\right)$
10. $u_n = \dfrac{(2n^2+1)^5}{(n-2n^5)^2}$.

Exercice 23. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ? Justifier.

1. $n + \frac{1}{2} \sim n$
2. $\sqrt{n + \frac{1}{2}} \sim \sqrt{n}$
3. $e^{n+\frac{1}{2}} \sim e^n$
4. $\ln\left(n + \frac{1}{2}\right) \sim \ln(n)$.

Exercice 24. Déterminer un équivalent simple et étudier la convergence des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{2n^2+100}{n^3+3n+5}$
2. $u_n = \dfrac{2^n+3^n}{3^n-2^n}$
3. $u_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{3n+(-1)^{n+1}}$
4. $u_n = \dfrac{(1+2+\cdots+n)^3}{(n^3-3n+1)^2}$
5. $u_n = \dfrac{an^2+bn+c}{n+1000}$ $(a,b,c \in \mathbb{R})$
6. $u_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n$
7. $u_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$
8. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
9. $u_n = \dfrac{(-1)^n n + 1}{n + \sqrt{n}}$
10. $u_n = \dfrac{n^{1000} + 2^n}{3^{-n} + (n+2)^{1000}}$
11. $u_n = \dfrac{(1+2+\cdots+n)^5}{(2n^5-3n+1)^2}$
12. $u_n = \dfrac{(2n+1)^4\left(e^{\frac{1}{2n}} - 1\right)}{(n^2+n+1)^3}$
13. $u_n = \ln(n^2+1) - \ln(n^2)$
14. $u_n = \cos\left(\left(\sin(\dfrac{1}{n})\right)\right) - 1$