Feuille d'exercices n°14 – Correction
Suites réelles

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 4 - \frac{3}{u_n}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant u_n \leqslant 3$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Que peut-on en déduire ? Déterminer $\lim u_n$.

1. Démonstration par récurrence :
   Pour tout $n \in \mathscr{P}_n$: $2 \leqslant u_n \leqslant 3$.
   Initialisation : $u_0 = 2$, donc $2 \leqslant u_0 \leqslant 3$ et $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie.

$$\begin{aligned}
2 \leqslant u_n \leqslant 3 &\Longrightarrow \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{u_n} \geqslant \frac{1}{3} \\
&\Longrightarrow -\frac{3}{2} \leqslant -\frac{3}{u_n} \leqslant -1 \\
&\Longrightarrow \frac{5}{2} \leqslant 4 - \frac{3}{u_n} \leqslant 3 \\
&\Longrightarrow 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3 \text{ (car } 2 \leqslant \frac{5}{2}).
\end{aligned}$$

   Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant u_n \leqslant 3$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= 4 - \frac{3}{u_n} - u_n \\
&= -\frac{u_n^2 - 4u_n + 3}{u_n} \\
&= -\frac{(u_n - 3)(u_n - 1)}{u_n} \\
&\geqslant 0
\end{aligned}$$

   car $2 \leqslant u_n \leqslant 3$.
   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite (u_n) est croissante.

3. La suite (u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone. On note ℓ la limite de (u_n).
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4 - \frac{3}{u_n}$. Par passage à la limite, on obtient $\ell = 4 - \frac{3}{\ell}$, c'est-à-dire $\ell^2 - 4\ell + 3 = 0$. Donc $\ell = 1$ ou $\ell = 3$.
   De plus, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant u_n \leqslant 3$. Par passage à la limite, on a $2 \leqslant \ell \leqslant 3$. D'où $\ell = 3$.
   Conclusion : $\lim u_n = 3$.

Exercice 2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par

$$u_1 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n.$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, u_n est strictement positif.
3. Étudier les variations de la suite (u_n).
4. Que peut-on en déduire ?

1. $u_2 = \frac{1+1}{2\times 1}u_1 = \frac{1}{2}$, $u_3 = \frac{3}{2\times 2}u_2 = \frac{3}{8}$ et $u_4 = \frac{4}{2\times 3}u_3 = \frac{1}{4}$.
2. Démonstration par récurrence sans difficulté.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{n+1}{n+n}$. Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ et $u_{n+1} \leqslant u_n$.
   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante.
4. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente, d'après le théorème de la limite monotone. On note ℓ sa limite.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n}u_n$.
   Par passage à la limite, on obtient $\ell = \frac{1}{2}\ell$, donc $2\ell = \ell$. D'où $\ell = 0$
   Conclusion : $\lim u_n = 0$.

Exercice 3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$.
3. Que peut-on en déduire ?

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
   Conclusion : La suite (u_n) est croissante.
2. Démonstration par récurrence :
   $u_0 = 1$ donc $u_0 > 0^2$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n > n^2$. On a $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$, donc $u_{n+1} > n^2 + 2n + 3$, donc $u_{n+1} > (n+1)^2 + 2$, d'où $u_{n+1} > (n+1)^2$.
   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$ et $\lim n^2 = +\infty$. D'après le théorème de comparaison des limites, on a $\lim u_n = +\infty$.

Exercice 4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
3. Que peut-on en déduire ? Déterminer $\lim u_n$.

1. Indication : Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3 - \frac{8}{3+u_n}$.
   Démonstration par récurrence.
   $u_0 = 2$, donc $u_0 > 1$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n > 1$.
   $$\begin{aligned} u_n > 1 &\Longrightarrow 3 + u_n > 4 \\ &\Longrightarrow \frac{1}{3+u_n} < \frac{1}{4} \\ &\Longrightarrow \frac{-8}{3+u_n} > -2 \\ &\Longrightarrow 3 - \frac{8}{3+u_n} > 1 \\ &\Longrightarrow u_{n+1} > 1. \end{aligned}$$
   On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n \\ &= \frac{1-u_n^2}{3+u_n}. \end{aligned}$$
   Or $u_n > 1$ donc $1 - u_n^2 < 0$ et $3 + u_n > 0$, d'où $u_{n+1} - u_n < 0$.
   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$. La suite (u_n) est strictement décroissante.

Exercice 5. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Que peut-on en déduire ? Déterminer $\lim u_n$.

1. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \frac{1}{2}$.
   $u_0 \leqslant \frac{1}{2}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant 1$. Alors :
   $$\frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} \leqslant \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5},$$
   donc $u_{n+1} \leqslant \frac{5}{10}$.
   On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \frac{1}{2}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} - u_n = \frac{2(1-2u_n)}{5}$.
   Or $u_n \leqslant \frac{1}{2}$ donc $-2u_n \geqslant -1$, d'où $1 - 2u_n \geqslant 0$ et $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite (u_n) est croissante.
3. La suite (u_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$. Elle est donc convergente, d'après le théorème de la limite monotone. On note ℓ sa limite.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}$. Par passage à la limite, on a $\ell = \frac{1}{5}\ell + \frac{2}{5}$. D'où $\ell = \frac{1}{2}$.
   Conclusion : $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 6. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_0 = 6 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2.$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,4x - 0,05x^2$. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;8]$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$0 \leqslant v_n < v_{n+1} \leqslant 8.$$
3. Que peut-on en déduire ? Déterminer $\lim v_n$.

1. La fonction f est dérivable sur $[0, 8]$ et pour tout $x \in [0, 8]$, $f'(x) = 1,4 - 0,1x$.
   $f'(x) > 0 \iff 14 > x$.
   La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $[0, 8]$
   .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}_n$: « $0 \leqslant v_n < v_{n+1} \leqslant 8.$ »
   Initialisation : $v_0 = 6$ et $v_1 = 6,6$, donc $0 \leqslant v_0 < v_1 \leqslant 8$ et $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_n$ soit vraie. On sait que
   $$0 \leqslant v_n < v_{n+1} \leqslant 8,$$
   donc
   $$f(0) \leqslant f(v_n) < f(v_{n+1}) \leqslant f(8)$$
   (car f est strictement croissante sur l'intervalle $[0, 8]$), c'est-à-dire
   $$0 \leqslant v_{n+1} < v_{n+2} \leqslant 8.$$
   D'où $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n < v_{n+1} \leqslant 8$.
3. D'après ce qui précède, la suite (v_n) est croissante et majorée par 8. Elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone. On note ℓ la limite de (v_n).
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2$.
   Par passage à la limite, on obtient $\ell = 1,4\ell - 0,05\ell^2$, donc $40\ell - 5\ell^2 = 0$, donc $(8 - \ell)\,\ell = 0$, d'où $\ell = 0$ ou $\ell = 8$.
   Comme $v_0 = 6$ et (v_n) strictement croissante, $\ell \geqslant 6$. D'où $\ell = 8$.
   Conclusion : $\lim v_n = 8$.

Exercice 7. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définies par

$$u_n = \frac{n-1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = 1 + \frac{1}{n^2},$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En déduire qu'elles sont convergentes et déterminer leur limite.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n-1}{n} = \dfrac{1}{n(n+1)} > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$. La suite (u_n) est (strictement) croissante.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = 1 + \dfrac{1}{(n+1)^2} - \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{n^2 - (n+1)^2}{n^2(n+1)^2} < 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} < v_n$. La suite (v_n) est (strictement) décroissante.

De plus, $\lim (v_n - u_n) = \lim \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\right) = 0$.
Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes. Elles sont convergentes vers une limite commune : 1.

Exercice 8. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définies par

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n},$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En utilisant votre calculatrice, donner une approximation de leur limite à 10^{-2} près par défaut.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} \geqslant u_n$. Donc la suite (u_n) est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - \left(u_n + \frac{1}{n}\right) \\ &= u_{n+1} - u_n - \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{n - 2(2n+1)}{n(2n+1)(2n+2)} \\ &= -\frac{3n+2}{n(2n+1)(2n+2)}. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $v_{n+1} \leqslant v_n$. Donc la suite (v_n) est décroissante.

De plus, $\lim (v_n - u_n) = \lim \dfrac{1}{n} = 0$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite, notée ℓ, et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$u_n \leqslant \ell \leqslant v_n.$$

En particulier, $u_{100} \leqslant \ell \leqslant u_{100} + 10^{-2}$. On en déduit une approximation par défaut de ℓ à 10^{-2} près : $0,69$.

Exercice 9. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En utilisant votre calculatrice, donner une approximation de leur limite à 10^{-2} près par excès.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$. La suite (u_n) est donc croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n}\right) \\ &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $v_{n+1} < v_n$. La suite (v_n) est donc décroissante.

$\lim (v_n - u_n) = \lim \dfrac{1}{n} = 0$.
Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite, notée ℓ, et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$u_n \leqslant \ell \leqslant v_n.$$

En particulier, $u_{100} \leqslant \ell \leqslant u_{100} + 10^{-2}$. On en déduit une approximation par excès de ℓ à 10^{-2} près : $1,65$.

Exercice 10. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 2$ et les relations

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1 \leqslant v_n$.
2. Étudier la suite $(w_n) = (v_n - u_n)$.
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}_n$: « $u_n \leqslant 1 \leqslant v_n$. »
   Initialisation : $u_0 \leqslant 1 \leqslant v_0$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie.

$$\begin{aligned} u_n \leqslant 1 \leqslant v_n &\Longrightarrow 3u_n \leqslant 3 \leqslant 3v_n \\ &\Longrightarrow 3u_n + 1 \leqslant 4 \leqslant 3v_n + 1 \\ &\Longrightarrow \frac{3u_n+1}{4} \leqslant 1 \leqslant \frac{3v_n+1}{4} \\ &\Longrightarrow u_{n+1} \leqslant 1 \leqslant v_{n+1}. \end{aligned}$$

   Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1 \leqslant v_n$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \dfrac{3}{4} w_n$. La suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 \left(\frac{3}{4}\right)^n = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1-u_n}{4} \geqslant 0$. Donc la suite (u_n) est croissante.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1-v_n}{4} \leqslant 0$. Donc la suite (v_n) est décroissante.
   De plus $\lim (v_n - u_n) = \lim w_n = \lim 2\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ car $\left|\frac{3}{4}\right| < 1$.
   Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes et convergent vers une limite commune notée ℓ.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{4}$. Par passage à la limite, on obtient $\ell = \dfrac{3\ell+1}{4}$, d'où $\ell = 4$.

Exercice 11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang.
   $\iff \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = u_n$.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang.
   $\iff \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geqslant n_0,\ u_{n+1} \geqslant u_n$.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante.
   $\iff \exists n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.
   $\iff \forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n > M$.

5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.
$\iff \overline{\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N} \text{ vérifiant } n\geqslant n_0,\ |u_n|\leqslant\varepsilon}$
$\iff \exists\varepsilon>0,\ \forall n_0\in\mathbb{N},\ \exists n\in\mathbb{N} \text{ vérifiant } n\geqslant n_0 \text{ et } |u_n|>\varepsilon.$

Exercice 12. En utilisant les définitions du cours, montrer que :

1. $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
2. $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
3. $\left(\sin(n\frac{\pi}{2})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.
4. Si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ.
   Soit $\varepsilon>0$.
   $\lim u_{2n}=\ell$, donc $\exists n_1\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}$ vérifiant $2n\geqslant n_1$, $|u_{2n}-\ell|\leqslant\varepsilon \quad (1)$.
   $\lim u_{2n+1}=\ell$, donc $\exists n_2\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N}$ vérifiant $2n+1\geqslant n_2$, $|u_{2n+1}-\ell|\leqslant\varepsilon \quad (2)$.
   On pose $n_0=\max(n_1,n_2)$. Soit $n\in\mathbb{N}$ vérifiant $n\geqslant n_0$.
   Si n est pair, alors $|u_n-\ell|\leqslant\varepsilon$ d'après (1) (car $n\geqslant n_1$).
   Si n est impair, alors $|u_n-\ell|\leqslant\varepsilon$ d'après (2) (car $n\geqslant n_2$).
   Ainsi, $\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N}$ vérifiant $n\geqslant n_0$, $|u_n-\ell|\leqslant\varepsilon$.
   D'où $\lim u_n=\ell$.

Exercice 13. Déterminer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque :

1.	$u_n=n^2+n$	7.	$u_n=2^n-3^n$	13.	$u_n=\frac{(-1)^n}{n+2}$
2.	$u_n=n^2-n$	8.	$u_n=\frac{2^n+5^n}{7^n}$	14.	$u_n=n-\cos(n)$
3.	$u_n=\frac{2}{n+2}$	9.	$u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}$	15.	$u_n=\frac{n^2+\sin(n)}{n+5}$
4.	$u_n=\frac{n^2+2}{n+1}$	10.	$u_n=n-\sqrt{n}$	16.	$u_n=n^2\left\lfloor\frac{1}{n}\right\rfloor$
5.	$u_n=\frac{4n^2-n}{5n^2+1}$	11.	$u_n=n-e^n$	17.	$u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
6.	$u_n=\frac{3}{0.5^n}$	12.	$u_n=n^2-\ln(n)$	18.	$u_n=\sqrt{n^2+n+1}-n$

1. $\lim u_n=+\infty$
2. $\lim u_n=\lim n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)=+\infty$
3. $\lim u_n=\lim\frac{2}{n+2}=0$
4. $\lim u_n=\lim n\left(\frac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}\right)=+\infty$
5. $\lim u_n=\lim\frac{4-\frac{1}{n}}{5+\frac{1}{n^2}}=\frac{4}{5}$
6. $\lim 0.5^n=0^+$, car $-1<0.5<1$, donc $\lim u_n=+\infty$
7. $\lim u_n=\lim 2^n-3^n=\lim 3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right)=-\infty$
8. $\lim u_n=\lim\left(\frac{2}{7}\right)^n+\left(\frac{5}{7}\right)^n=0$
9. $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k=\frac{1-(1/3)^{n+1}}{1-(1/3)}$, donc $\lim u_n=\frac{3}{2}$.
10. $\lim u_n=\lim n\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=+\infty$ par croissances comparées.
11. $\lim u_n=\lim e^n\left(\frac{n}{e^n}-1\right)=-\infty$ par croissances comparées.
12. $\lim u_n=\lim n^2\left(1-\frac{\ln n}{n^2}\right)=+\infty$ par croissances comparées.
13. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\frac{-1}{n+2}\leqslant\frac{(-1)^n}{n+2}\leqslant\frac{1}{n+2}$, or $\lim\frac{-1}{n+2}=\lim\frac{1}{n+2}=0$, donc $\lim\frac{(-1)^n}{n+2}=0$ d'après le théorème d'encadrement.
14. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $n-\cos(n)\geqslant n-1$, or $\lim n-1=+\infty$, donc $\lim n-\cos(n)=+\infty$ par comparaison.
15. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\frac{n^2+\sin(n)}{n+5}\geqslant\frac{n^2-1}{n+5}$, or $\lim\frac{n^2-1}{n+5}=+\infty$, donc $\lim\frac{n^2+\sin(n)}{n+5}=+\infty$ par comparaison.
16. Pour tout entier $n\geqslant 2$, $u_n=0$. On en déduit $\lim u_n=0$.
17.
$$\begin{aligned}u_n&=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\\&=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\&=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},\end{aligned}$$
donc $\lim u_n=0$.

18.

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n^2+n+1}-n \\ &= \frac{\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+n+1}+n} \\ &= \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n} \\ &= \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}, \end{aligned}$$

donc $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 14. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

1. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$

$$\begin{aligned} &\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\ \iff\ & a(n+1)(n+2) + bn(n+2) + cn(n+1) = 1 \\ \implies & \begin{cases} a = 1/2 & (n=0) \\ b = -1 & (n=-1) \\ c = 1/2 & (n=-2) \end{cases} \end{aligned}$$

Réciproquement, on vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{2}\times\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{n+2}.$$

2. En déduire la limite de la suite $v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{k+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right). \end{aligned}$$

Conclusion : $\lim v_n = \dfrac{1}{4}$.

Exercice 15. Soient f la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie A : Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide de la fonction f.

1. Calculer les limites de f.
   $\lim_{x\to 1/2} x^2 = \dfrac{1}{4}$ et $\lim_{x\to(1/2)^+} 2x-1 = 0^+$, donc $\lim_{x\to(1/2)^+} f(x) = +\infty$.
   $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2} = +\infty$.
2. Étudier les variations de f, puis tracer $\mathscr{C}_f$.
   Pour tout $x \in \left]\frac{1}{2},+\infty\right[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left[x^2\right]' \times [2x-1] - \left[x^2\right] \times [2x-1]'}{(2x-1)^2} \\ &= \cdots \end{aligned}$$

3. En utilisant $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = x$, placer les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'axe (Ox).
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
   On pose $\mathscr{P}_n$: « $u_n > 1$ »
   Initialisation : $\mathscr{P}_0$ est vraie car $u_0 = 2$.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie et on montre $\mathscr{P}_{n+1}$: « $u_{n+1} > 1$ ».
   On suppose que $u_n > 1$.
   Donc $f(u_n) > f(1)$ car la fonction $x \mapsto f(x)$ est strictement croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$. D'où $u_{n+1} > 1$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   Soit $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= f(u_n) - u_n \\ &= \frac{u_n^2}{2u_n - 1} - u_n \\ &= \frac{-u_n^2 + u_n}{2u_n - 1} \\ &= \frac{u_n\left(-u_n + 1\right)}{2u_n - 1} \end{aligned}$$
   Or $u_n > 1$ d'après Q4, donc $u_n > 0$, $-u_n + 1 < 0$ et $2u_n - 1 > 0$.
   Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$.
   Conclusion : La suite (u_n) est décroissante.
6. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
   La suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle est convergente d'après le théorème de la limite monotone : $\lim u_n = \ell$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$. Par passage à la limite, $\ell = f(\ell)$.
   Donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$.
   De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. Par passage à la limite, on obtient $\ell \geqslant 1$. D'où $\ell = 1$.
   Conclusion : $\lim u_n = 1$.

Partie B : Étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide d'une suite géométrique.

Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \quad \text{et} \quad w_n = \ln(v_n).$$

1. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. En déduire l'expression du terme général de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \ln\left(v_{n+1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}}\right) \\ &= \ln\left(u_{n+1} - 1\right) - \ln\left(u_{n+1}\right) \\ &\text{(possible d'après } Q4) \\ &= \ln\left(\frac{u_n^2}{2u_n - 1} - 1\right) - \ln\left(\frac{u_n^2}{2u_n - 1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2u_n - 1}\right) - \ln\left(\frac{u_n^2}{2u_n - 1}\right) \\ &= \left[\ln\left(u_n^2 - 2u_n + 1\right) - \ln\left(2u_n - 1\right)\right] - \left[\ln\left(u_n^2\right) - \ln\left(2u_n - 1\right)\right] \\ &\text{(possible d'après } Q4) \\ &= \ln\left(\left(u_n - 1\right)^2\right) - \ln\left(\left(u_n\right)^2\right) \\ &= 2\left[\ln\left(u_n - 1\right) - \ln\left(u_n\right)\right] \\ &\text{(possible d'après } Q4) \\ &= 2\ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right) \\ &= 2\ln\left(v_n\right) \\ &= 2w_n \end{aligned}$$
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 2w_n$. La suite (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 \times q^n = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \times 2^n = -\ln(2) \times 2^n$.
   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = -\ln(2) \times 2^n$.

2. En déduire l'expression du terme général de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On sait que $w_n = \ln(v_n)$ donc

$$\begin{aligned} v_n &= \mathrm{e}^{w_n} \\ &= \mathrm{e}^{-\ln(2)\times 2^n} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln(2)\times 2^n}} \\ &= \frac{1}{\left(\mathrm{e}^{\ln(2)}\right)^{2^n}} \\ &= \frac{1}{2^{2^n}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} \end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$.

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$.
On sait que $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$ donc $u_n \times v_n = u_n - 1$ donc $(v_n - 1)\, u_n = -1$ donc

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{-1}{v_n - 1} \\ &= \frac{1}{1 - v_n} \\ &= \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}. \end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$.

4. Retrouver le résultat de la question $A.6$.
$\lim \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim u_n = \dfrac{1}{1-0} = 1$.

Exercice 16. En utilisant le théorème de la limite monotone, montrer la convergence des suites suivantes :

1. $u_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{2n+3} < 1$,
donc $u_{n+1} < u_n$. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone.

2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$.
La suite (u_n) est croissante.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{1}{n+k} \leqslant \frac{1}{n+1}$,
donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1}$, donc $u_n \leqslant \frac{n}{n+1} \leqslant 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1$. La suite (u_n) est majorée par 1.
La suite (u_n) est croissante et majorée. Elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone.

3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(n+1)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn(n+1)}. \end{aligned}$$

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{1}{n(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{kn(n+1)} \leqslant \frac{1}{n(n+1)}$.
Donc $\frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{kn(n+1)} \leqslant \frac{1}{n+1}$,
donc $-\frac{1}{(n+1)^2} \geqslant -\sum_{k=1}^n \frac{1}{kn(n+1)} \geqslant -\frac{1}{n+1}$ et
$0 \geqslant \frac{1}{(n+1)^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{kn(n+1)} \geqslant \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+1}$.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
La suite (u_n) est donc décroissante. On constate de plus que pour

tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n > 0$. La suite (u_n) est donc minorée par 0. Elle est convergente d'après le théorème de la limite monotone.

Exercice 17. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4} \text{ et } v_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes (on commencera par étudier la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$).
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $8u_n + 3v_n = 44$.
3. En déduire la limite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. On introduit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \frac{1}{12}w_n$. La suite (w_n) est donc une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{12}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 \times q^n = \frac{11}{12^n}$. Soit $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3u_n + v_n}{4} - u_n \\ &= \frac{v_n - u_n}{4} \\ &= \frac{w_n}{4} \\ &= \frac{11}{4 \times 12^n} > 0. \end{aligned}$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite (u_n) est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{2u_n + v_n}{4} - v_n \\ &= -\frac{2}{3}(v_n - u_n) \\ &= -\frac{2 \times 11}{3 \times 12^n} < 0. \end{aligned}$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leqslant v_n$. La suite (v_n) est décroissante. De plus, $\lim (v_n - u_n) = \lim \frac{11}{12^n} = 0$. Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes. Elles convergent vers une limite commune que l'on note ℓ.
2. On démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $8u_n+3v_n = 44$.
3. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $8u_n + 3v_n = 44$. Par passage à la limite, on obtient $8\ell + 3\ell = 44$, c'est-à-dire $\ell = 4$.

Exercice 18. (Irrationnalité de e) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!} = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

1. Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite.
2. On admet que leur limite commune est e. On veut montrer que $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$. On raisonne pour cela par l'absurde en supposant que $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^\star$.
Montrer que $u_q < \mathrm{e} < v_q$. Conclure.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} > u_n$. La suite (u_n) est strictement croissante. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n \cdot n!}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} < 0. \end{aligned}$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $v_{n+1} < v_n$. La suite (v_n) est strictement décroissante. De plus, $\lim (v_n - u_n) = \lim \frac{1}{n \cdot n!} = 0$. Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et convergent vers une limite commune : e.

2. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \mathrm{e} \leqslant v_n$. En particulier,

$$u_q < u_{q+1} \leqslant \mathrm{e} \leqslant v_{q+1} < v_q.$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{p}{q} < \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + \frac{1}{q \cdot q!},$$

donc

$$q \cdot q! \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < p \cdot q! < q \cdot q! \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + 1,$$

d'où

$$q \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} < p \cdot q! < q \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} + 1.$$

Pour tout $k \in [\![1, q]\!]$, $\dfrac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$. Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$. On a montré que l'entier $p \cdot q!$ est compris strictement entre deux entiers consécutifs. Ce qui est impossible, donc $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 19. (Moyenne arithmético-géométrique)

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$0 < x < y \Longrightarrow x < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < y.$$

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$. On pose $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite et que cette limite appartient à l'intervalle $\left[\sqrt{ab}; \frac{a+b}{2}\right]$.

Exercice 20. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Les propositions A et B sont-elles équivalentes ? L'une d'entre elles implique-t-elle l'autre ?

1. $A : u_n = o(v_n)$ et $B : u_n = O(v_n)$.
2. $A : u_n \sim v_n$ et $B : u_n = O(v_n)$.
3. $A : \forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + w_n,$ où $w_n = o(v_n)$ et $B : u_n \sim v_n$.

Exercice 21. Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$.

1. Montrer que $n^\alpha = o(n^\beta)$.
2. Donner un équivalent simple de $n^\alpha + n^\beta$.

Exercice 22. Utiliser des équivalents ou des croissances comparées pour étudier la convergence des suites suivantes :

1. $u_n = (2n+1)\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$
2. $u_n = \frac{\ln(n+n^2)}{\ln(n)}$
3. $u_n = \dfrac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)}$
4. $u_n = n^{\frac{1}{\ln n}}$
5. $u_n = \sqrt[n]{n}$
6. $u_n = \dfrac{2^{n+4} - 5^{n+4}}{2^n - 5^n}$
7. $u_n = (5n+1)^2 \ln\left(1 + \frac{1}{3n^2}\right)$
8. $u_n = \left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)^n$
9. $u_n = n^2\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} - 1\right)$
10. $u_n = \dfrac{(2n^2+1)^5}{(n-2n^5)^2}$.

Exercice 23. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ? Justifier.

1. $n + \frac{1}{2} \sim n$
2. $\sqrt{n + \frac{1}{2}} \sim \sqrt{n}$
3. $e^{n+\frac{1}{2}} \sim e^n$
4. $\ln\left(n + \frac{1}{2}\right) \sim \ln(n)$.

Exercice 24. Déterminer un équivalent simple et étudier la convergence des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{2n^2 + 100}{n^3 + 3n + 5}$
2. $u_n = \dfrac{2^n + 3^n}{3^n - 2^n}$
3. $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{3n + (-1)^{n+1}}$
4. $u_n = \dfrac{(1+2+\cdots+n)^3}{(n^3-3n+1)^2}$
5. $u_n = \dfrac{an^2 + bn + c}{n + 1000}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$
6. $u_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n$
7. $u_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$
8. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
9. $u_n = \dfrac{(-1)^n n + 1}{n + \sqrt{n}}$
10. $u_n = \dfrac{n^{1000} + 2^n}{3^{-n} + (n+2)^{1000}}$
11. $u_n = \dfrac{(1+2+\cdots+n)^5}{(2n^5-3n+1)^2}$
12. $u_n = \dfrac{(2n+1)^4\left(e^{\frac{1}{2n}} - 1\right)}{(n^2+n+1)^3}$
13. $u_n = \ln(n^2+1) - \ln(n^2)$
14. $u_n = \cos\left(\left(\sin(\dfrac{1}{n})\right)\right) - 1$