Feuille d'exercices n°15
Calcul matriciel

Exercice 1. Écrire explicitement la matrice $A = (a_{ij})$ à n lignes et p colonnes dans les cas suivants :

1. $n = 4,\ p = 3$ et $a_{ij} = \min(i, j)$.
2. $n = 2,\ p = 3$ et $a_{ij} = j\,(-1)^i$.
3. $n = 5,\ p = 5$ et $a_{ij} = \delta_{ij}$,
   où δ est le symbole de Kronecker défini par $\delta_{ij} = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right.$.
4. $n = 4,\ p = 4$ et $a_{ij} = (1 - \delta_{ij})\, i\, j$.
5. $n = 3,\ p = 3$ et $a_{ij} = \cos(\frac{i\pi}{3}) \sin(\frac{i\pi}{3})$.

Exercice 2. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 7 & 3 & 5 \\ 8 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

Parmi les calculs suivants, lesquels sont licites ? Le cas échéant, effectuer les calculs.

1. $CF + 3I_3$	2. FC	3. BDA
4. $CD + F$	5. $DC - F$	6. $C^T E + DE$
7. $CD + E^2$	8. $ECD + E^T$	9. $BF\,B^T$

Exercice 3. Soient $i, j, k, l \in [\![1, n]\!]$ et $E_{i,j}$, $E_{k,l}$ les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ correspondantes. Calculer $E_{i,j} \times E_{k,l}$.

Exercice 4. Soient

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer AB et BA.
2. Développer $(A + B)^2$.

Exercice 5. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = 0_3$.

Exercice 6. 1. Calculer le produit suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure.

Exercice 7. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de A l'élément de $\mathbb{K}$ défini par :

$$\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

Exercice 8. Soit $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$ avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Soit $A = \left(\omega^{(k-1)(\ell-1)}\right)_{1 \leqslant k, \ell \leqslant n}$. Calculer $A\bar{A}$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les coefficients de A^n lorsque :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 10. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

1. Soit $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $A_\theta \times A_\varphi$.
2. Soit $(\theta, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$. Calculer $(A_\theta)^n$.

Exercice 12. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On pose $N = A - I_3$. Déterminer N^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles définies par la donnée de u_0, v_0, w_0 et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & u_n + 2v_n + 3w_n \\ v_{n+1} & = & v_n + 2w_n \\ w_{n+1} & = & w_n \end{array} \right. .$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n, u_0, v_0 et w_0.

Exercice 13. Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & -2 \\ 1 & m+1 & m-2 \\ 2 & 2m+1 & 2m-4 \end{pmatrix}.$$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Résoudre, lorsque c'est possible, le système

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

En déduire A^{-1}.

Exercice 14. Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Le cas échéant, calculer leur inverse.

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 15. Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Le cas échéant, calculer leur inverse.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
6. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

Exercice 16. 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 2I_n - A$. Montrer que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I_n)$.

2. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Calculer A^2. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 = aA + bI_3$.
En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A = 4I_n$. Montrer que A est inversible et déterminer une expression de A^{-1} en fonction de A et de I_n.

Exercice 17. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. Calculer $P^{-1}AP$.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 18. Écrire les systèmes suivants sous forme matricielle :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z &=& 3 \\ x+2y+z &=& 1 \\ 2x+y+z &=& 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} x+2z &=& 1 \\ -y+z &=& 2 \\ x-2y &=& 1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} x+2y-3z &=& 4 \\ x+3y-z &=& 11 \\ 2x+5y-5z &=& 13 \\ x+4y+z &=& 18 \end{array}\right.$$

Exercice 19. Déterminer l'expression, le rang, le noyau et l'image de l'application linéaire canoniquement associée à la matrice :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 20. Déterminer le rang des applications linéaires suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y-z, x, -z) \end{array}$$

et

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, 2x-y, y) \end{array}.$$