Feuille d'exercices n°15 – Correction
Calcul matriciel

Exercice 1. Écrire explicitement la matrice $A = (a_{ij})$ à n lignes et p colonnes dans les cas suivants :

1. $n = 4,\ p = 3$ et $a_{ij} = \min(i, j)$.
2. $n = 2,\ p = 3$ et $a_{ij} = j\,(-1)^i$.
3. $n = 5,\ p = 5$ et $a_{ij} = \delta_{ij}$,

   où δ est le symbole de Kronecker défini par $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
4. $n = 4,\ p = 4$ et $a_{ij} = (1 - \delta_{ij})\, i\, j$.
5. $n = 3,\ p = 3$ et $a_{ij} = \cos(\frac{i\pi}{3}) \sin(\frac{i\pi}{3})$.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
3. $A = I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 0 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 0 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/4 & \sqrt{3}/4 & \sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & -\sqrt{3}/4 & -\sqrt{3}/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 7 & 3 & 5 \\ 8 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

Parmi les calculs suivants, lesquels sont licites ? Le cas échéant, effectuer les calculs.

1. $CF + 3I_3$
2. FC
3. BDA
4. $CD + F$
5. $DC - F$
6. $C^T E + DE$
7. $CD + E^2$
8. $ECD + E^T$
9. $BF\,B^T$

1. CF est une matrice de taille 2×3 et $3I_3$ est de taille 3×3. Le calcul $CF + 3I_3$ n'est pas défini.
2. $\#\{\text{colonnes de } F\} \neq \#\{\text{lignes de } C\}$. Le produit FC n'est donc pas défini
3. $BDA = (-53)$
4. CD est une matrice 2×2 et F est une matrice 3×3. La somme n'est donc pas définie.
5. $DC - F = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 24 \\ -1 & 18 & 57 \\ -2 & 3 & 33 \end{pmatrix}$

6. $C^T E + DE = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 19 & 0 \\ 29 & 0 \end{pmatrix}$
7. $CD + E^2 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 18 & 60 \end{pmatrix}$
8. $ECD + E^T = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$
9. $BFB^T = (187)$

Exercice 3. Soient $i, j, k, l \in [\![1, n]\!]$ et $E_{i,j}$, $E_{k,l}$ les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ correspondantes. Calculer $E_{i,j} \times E_{k,l}$.

On note $P = E_{i,j} \times E_{k,l}$.
Comme toutes les lignes de $E_{i,j}$ sont nulles sauf la i-ème, il en est de même pour les lignes de P.
Comme toutes les colonnes de $E_{k,l}$ sont nulles sauf la l-ième, il en est de même pour les colonnes de P.
Ainsi le seul coefficient éventuellement non nul de P est le coefficient d'indice (i, l) : $P_{i,l} = \sum_{m=1}^{n} \delta_{m,j}\delta_{m,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k \end{cases}$. On conclut que $P = E_{i,l}$ si $j = k$ et 0 sinon.

Conclusion : $E_{i,j} \times E_{k,l} = \begin{cases} E_{i,l} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 4. Soient

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer AB et BA.
2. Développer $(A + B)^2$.

1. On constate que $AB \neq BA$.
2. $(A + B)^2 = (A + B) \times (A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$.

Exercice 5. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = 0_3$.

Réponse : L'ensemble des matrices solutions est

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ -a & -b & -c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Exercice 6. 1. Calculer le produit suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure.

2. Soient A et B deux matrices triangulaires supérieures. Par définition, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i > j$, on a $a_{i,j} = 0$ et $b_{i,j} = 0$.
On note $C = A \times B$. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i > j$. Montrons que $c_{i,j} = 0$.

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \text{ (produit matriciel)} \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} a_{i,k} b_{k,j} + \sum_{k=i}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{i-1} 0 \times b_{k,j}}_{\text{car } i>k} + \underbrace{\sum_{k=i}^{n} a_{i,k} \times 0}_{\text{car } k\geqslant i>j} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i > j$, $c_{i,j} = 0$. La matrice C est donc triangulaire supérieure.
Conclusion : Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure.

Exercice 7. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de A l'élément de $\mathbb{K}$ défini par :

$$\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $(M)_{i,j}$ le coefficient d'indice (i,j) de la matrice M. On sait que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j} \text{ et } (BA)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} B_{i,k}A_{k,j} \text{ (produit matriciel).}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{i,i} \quad \text{(par définition de la trace d'une matrice)}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,i}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A_{i,k}B_{k,i}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} B_{k,i}A_{i,k}\\
&= \sum_{k=1}^{n} (BA)_{k,k}\\
&= \mathrm{tr}(BA).
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Exercice 8. Soit $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$ avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Soit $A = \left(\omega^{(k-1)(\ell-1)}\right)_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n}$. Calculer $A\bar{A}$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $(M)_{k,\ell}$ le coefficient d'indice (k,ℓ) de la matrice M.

$$\begin{aligned}
\left(A\overline{A}\right)_{k,\ell} &= \sum_{j=1}^{n} (A)_{k,j}(\overline{A})_{j;\ell} \quad \text{(produit matriciel)}\\
&= \sum_{j=1}^{n} \omega^{(k-1)(j-1)}\overline{\omega^{(j-1)(\ell-1)}}\\
&= \sum_{j=1}^{n} \omega^{(k-1)(j-1)}\overline{\omega}^{(j-1)(\ell-1)}\\
&= \sum_{j=1}^{n} \omega^{(k-1)(j-1)}\omega^{-(j-1)(\ell-1)} \quad \text{(ici } \overline{\omega} = \omega^{-1}\text{)}\\
&= \sum_{j=1}^{n} \omega^{(k-\ell)(j-1)}\\
&= \sum_{J=0}^{n-1} \left(\omega^{(k-\ell)}\right)^{J} \quad (J = j-1)\\
&= \begin{cases} n & \text{si } \omega^{(k-\ell)} = 1\\ \dfrac{\left(\omega^{(k-\ell)}\right)^n - 1}{\omega^{(k-\ell)} - 1} & \text{si } \omega^{(k-\ell)} \neq 1 \end{cases}\\
&= \begin{cases} n & \text{si } k = \ell\\ \dfrac{(\omega^n)^{(k-\ell)} - 1}{\omega^{(k-\ell)} - 1} & \text{si } k \neq \ell \end{cases}\\
&= \begin{cases} n & \text{si } k = \ell\\ 0 & \text{si } k \neq \ell \end{cases} \quad (\text{car } \omega^n = 1).
\end{aligned}$$

Ainsi $A\overline{A} = nI_n$, d'où $A \times \dfrac{1}{n}\overline{A} = I_n$. On en déduit que A est inversible et que $A^{-1} = \dfrac{1}{n}\overline{A}$.

Remarque. En montrant que $AB = I_n$, on montre que A est inversible et que $A^{-1} = B$.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les coefficients de A^n lorsque :

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2. \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\mathscr{P}_n$: « $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$ ».

$A^1 = A = \begin{pmatrix} 2^0 & 2^0 \\ 2^0 & 2^0 \end{pmatrix}$ donc $\mathscr{P}_1$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie. Montrons $\mathscr{P}_{n+1}$.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n-1} + 2^{n-1} & 2^{n-1} + 2^{n-1} \\ 2^{n-1} + 2^{n-1} & 2^{n-1} + 2^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 2^{n-1} & 2 \times 2^{n-1} \\ 2 \times 2^{n-1} & 2 \times 2^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{H}_n$: « $A^{2n} = I_3$ et $A^{2n+1} = A$ ».
$\mathscr{H}_0$ est vraie car $A^0 = I_3$ et $A^1 = A$ par définition.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{H}_n$ vraie, c'est-à-dire $A^{2n} = I_3$ et $A^{2n+1} = A$, et on montre $\mathscr{H}_{n+1}$, c'est-à-dire $A^{2n+2} = I_3$ et $A^{2n+3} = A$.

$$\begin{aligned} A^{2n+2} &= A^{2n+1} \times A \quad \text{(par définition)} \\ &= A \times A \quad \text{(d'après } \mathscr{H}_n\text{)} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= I_3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A^{2n+3} &= A^{2n+2} \times A \\ &= I_3 \times A \\ &= A. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{H}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^{2n} = I_3$ et $A^{2n+1} = A$.

Exercice 10. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

On note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}_n$: « $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ ».

$A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} a^0 & 0 \\ 0 & a^0 \end{pmatrix}$, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie et on montre $\mathscr{P}_{n+1}$, c'est-à-dire $A^{n+1} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1)a^n b \\ 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{d'après } \mathscr{P}_n \\ &= \begin{pmatrix} a^{n+1}+0 & a^n b + na^n b \\ 0 & 0 + a^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{n+1} & (1+n)a^n b \\ 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose « $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ ».

Exercice 11. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

1. Soit $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $A_\theta \times A_\varphi$.
2. Soit $(\theta, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$. Calculer $(A_\theta)^n$.

1. Pour tout $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$, $A_\theta \times A_\varphi = A_{\theta+\varphi}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}_n$: « $(A_\theta)^n = A_{n\theta}$ ».

$(A_\theta)^0 = I_2$ et $A_0 = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} = I_2$, donc $(A_\theta)^0 = A_{0\times\theta}$ et $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{P}_n$ vraie et on montre $\mathscr{P}_{n+1}$, c'est-à-dire $(A_\theta)^{n+1} = A_{(n+1)\theta}$.

$$\begin{aligned} (A_\theta)^{n+1} &= (A_\theta)^n \times A_\theta \\ &= A_{n\theta} \times A_\theta \quad (\text{d'après } \mathscr{P}_n) \\ &= A_{n\theta+\theta} \quad (\text{d'après Q1}) \\ &= A_{(n+1)\theta}, \end{aligned}$$

donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(A_\theta)^n = A_{n\theta}$.

Exercice 12. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On pose $N = A - I_3$. Déterminer N^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles définies par la donnée de u_0, v_0, w_0 et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} &=& u_n + 2v_n + 3w_n \\ v_{n+1} &=& v_n + 2w_n \\ w_{n+1} &=& w_n \end{array} \right. .$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n, u_0, v_0 et w_0.

1. $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0_3$. On en déduit que pour tout $n \geqslant 3$, $N^n = 0_3$.

2. $A = N + I$. Comme $NI = N = IN$, on a, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} A^n &= (N+I)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \\ &= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N^1 + \binom{n}{2} N^2 + 0_3 \quad (\text{si } n \geqslant 2) \\ &\text{car } N^k = 0_3 \ \forall k \geqslant 3, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} A^n &= I + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2n & 3n + 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 + n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On constate que cette égalité est encore vérifiée pour $n = 0$ et pour $n = 1$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 + n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

On vérifie que $X_{n+1} = AX_n$.

En effet

$$\begin{aligned} AX_n &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_n + 2v_n + 3w_n \\ v_n + 2w_n \\ w_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= X_{n+1}. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$ (démonstration par récurrence à rédiger).

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 + n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = u_0 + 2nv_0 + (2n^2 + n)w_0 \\ v_n = v_0 + 2nw_0 \\ w_n = w_0 \end{cases}.$$

Remarque. La suite (w_n) est une suite constante et la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $2w_0$.

Exercice 13. Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & -2 \\ 1 & m+1 & m-2 \\ 2 & 2m+1 & 2m-4 \end{pmatrix}.$$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Résoudre, lorsque c'est possible, le système

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

En déduire A^{-1}.

Exercice très calculatoire.

On a $\det A = m$.

Lorsque $m \neq 0$, le système considéré admet une unique solution :

$$\begin{aligned}
& A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1-\frac{2}{m}\right)a - 2\left(m+\frac{1}{m}\right)b + \left(m+\frac{2}{m}\right)c \\ 2b - c \\ -\frac{1}{m}a - \frac{1}{m}b + \frac{1}{m}c \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{2}{m} & -2\left(m+\frac{1}{m}\right) & m+\frac{2}{m} \\ 0 & 2 & -1 \\ -\frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & \frac{1}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dans ce cas ($m \neq 0$), A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} m-2 & -2(m^2+1) & m^2+2 \\ 0 & 2m & -m \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : Lorsque $m = 0$, il faut distinguer deux cas pour la résolution du système :

- Si $c - b - a \neq 0$, alors le système n'admet aucune solution.
- Si $c - b - a = 0$, alors le système admet une infinité de solution.

Exercice 14. Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Le cas échéant, calculer leur inverse.

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. $\det A = 0$, donc A n'est pas inversible.
2. $\det A = -2$, donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$.
3. $\det A = 1 \neq 0$, donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. $\det A = 0$, donc A n'est pas inversible.
5. $\det A = 4 \neq 0$, donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & -1/2 \\ -1 & 3i/4 & i/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$.
6. A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 8 & -16 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 15. Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Le cas échéant, calculer leur inverse.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
6. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

1. $\det A = -2 \neq 0$, donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
2. $\det A = 0$, donc A n'est pas inversible.

3. $\det A = 4 \neq 0$, donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. $\det A = 4 \neq 0$, donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
5. $\det A = 0$, donc A n'est pas inversible.
6. $\det A = 1 \neq 0$, donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
7. A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 2 \\ 0 & -5 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 16.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 2I_n - A$. Montrer que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I_n)$.
2. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Calculer A^2. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 = aA + bI_3$.
En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A = 4I_n$. Montrer que A est inversible et déterminer une expression de A^{-1} en fonction de A et de I_n.

Remarque. En montrant que $AB = I_n$, on montre que A est inversible et que $A^{-1} = B$.

1.
$$\begin{aligned} A \times \frac{1}{2}(A + I_n) &= \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}A \\ &= \frac{1}{2}(2I_n - A) + \frac{1}{2}A \\ &= I_n - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A \\ &= I_n. \end{aligned}$$
On en déduit que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I_n)$.
2.
$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
On a
$$\begin{aligned} & A^2 = 3A - 2I_3 \\ \Longrightarrow & I_3 = \frac{1}{2}\left(3A - A^2\right) \\ \Longrightarrow & I_3 = A \times \frac{1}{2}(3I - A). \end{aligned}$$
On en déduit que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A)$.
3. On a
$$\begin{aligned} & A^3 - A = 4I_n \\ \Longrightarrow & I_n = \frac{1}{4}\left(A^3 - A\right) \\ \Longrightarrow & I_n = A \times \frac{1}{4}\left(A^2 - I\right). \end{aligned}$$
On en déduit que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{4}\left(A^2 - I\right)$.

Exercice 17. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. Calculer $P^{-1}AP$.

3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. $\det P = 1 \neq 0$ donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Dans la suite, on note $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   $P^{-1}AP = D \iff A = PDP^{-1}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}_n$: « $A^n = PD^nP^{-1}$ ».
   $A^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$ donc $A^0 = PD^0P^{-1}$ et $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie et on montre $\mathscr{P}_{n+1}$, c'est-à-dire $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$. On a

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= (PD^nP^{-1}) \times A \quad \text{(d'après } \mathscr{P}_n) \\ &= PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} \quad \text{(d'après } Q2) \\ &= PD^nIDP^{-1} \quad (\text{car } P^{-1}P = I) \\ &= PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1}, \end{aligned}$$

   donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ car D est diagonale, donc

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n - 1 & 1 - 2^n & 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n - 1 & 1 - 2^n & 2^n \end{pmatrix}$.

Exercice 18. Écrire les systèmes suivants sous forme matricielle :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y + 2z & = & 3 \\ x + 2y + z & = & 1 \\ 2x + y + z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x + 2z & = & 1 \\ -y + z & = & 2 \\ x - 2y & = & 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x + 2y - 3z & = & 4 \\ x + 3y - z & = & 11 \\ 2x + 5y - 5z & = & 13 \\ x + 4y + z & = & 18 \end{array}\right.$$

Exercice 19. Déterminer l'expression, le rang, le noyau et l'image de l'application linéaire canoniquement associée à la matrice :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$

1. On note f l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A.
   - Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
     $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x + 3y + 4z, 3x + 4y + 5z)$.
   - $\mathrm{rg}(f) = 2$,
   - $\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$,
   - $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$.
2. On note g l'application linéaire canoniquement associée à la matrice B.
   - Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
     $g(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y + 4z, x + 3y + 9z)$,
   - $\mathrm{rg}(g) = 3$,
   - $\mathrm{Ker}(g) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$,
   - $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$.
3. On note h l'application linéaire canoniquement associée à la matrice C.
   - Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,
     $h(x, y, z, t) = (x + 2y + 3z + 2t, 2x + 3y + 4z + 2t, 3x + 4y + 5z + 2t)$,
   - $\mathrm{rg}(h) = 2$,
   - $$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(h) &= \left\{ \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \\ -y/2 - z \end{pmatrix} \middle| (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right),\end{aligned}$$
   - $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.
4. On note ℓ l'application linéaire canoniquement associée à la matrice D.
   - Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,
     $\ell(x, y, z, t) = (x + 2y + z + 2t, -2x - 3y - 5t, 4x + 9y + 6z + 7t, x - y - 5z + 5t)$.
   - $\mathrm{rg}(\ell) = 3$,
   - $\mathrm{Ker}(\ell) = \left\{ \begin{pmatrix} -4t \\ t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$,
   - $\mathrm{Im}(\ell) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$.

Exercice 20. Déterminer le rang des applications linéaires suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y - z, x, -z) \end{array}$$

et

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, 2x - y, y) \end{array}.$$

$\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{rg}(f) = 3$.

$\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{rg}(g) = 2$.