Feuille d'exercices n°16
Polynômes

Exercice 1. Calculer $(X+1)^5-(X-1)^5$.

Exercice 2. Soient

$$P(X)=X^2-3X+2, \quad Q(X)=2 \quad \text{et} \quad R(X)=2X+1.$$

1. Déterminer $\widetilde{P}(2)$, $\widetilde{P}(-2)$ et $\widetilde{Q}(-2)$.
2. Déterminer $P\circ R$, $R\circ P$, $P\circ P$ et $Q\circ P$.
   Déterminer le polynôme dérivé de chacun de ces polynômes.
3. Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\widetilde{P}(A)$ et $\widetilde{Q}(A)$.
   Factoriser le polynôme P. En déduire une égalité matricielle.

Exercice 3. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que si les polynômes $P+Q$ et $P-Q$ sont constants, alors les polynômes P et Q sont constants.
2. Montrer que si le polynôme P^2-Q^2 est constant non nul, alors les polynômes P et Q sont constants.

Exercice 4. Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2)=(X^2+1)P(X)$.

Exercice 5. Déterminer le degré de $(X^2+X+1)^n-aX^{2n}-bX^{2n-1}$ en fonction de a et de b.

Exercice 6. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B :

1. $A(X)=X^7+2X^3-X^2+1$ et $B(X)=X^2+X+2$.
2. $A(X)=2X^8$ et $B(X)=X^3-2X^2+1$.
3. $A(X)=(1+i)X^4-5X^2+(2i-1)X+7$ et
   $B(X)=X^2-iX+(i-1)$.

Exercice 7. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par :

1. $X+1$,
2. X^2-3X+2.

Exercice 8. Soit $P(X)=X^4+X^3-3X^2-5X-2$.

1. Montrer que 2 est une racine simple de P.
2. Montrer que -1 est une racine triple de P.
3. En déduire la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles.

Exercice 9. Soient $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$, $P(X)=X^5+X^4+\alpha X^3+\beta X^2+5X-2$ et $Q(X)=X^3-2X+1$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

Déterminer α et β pour que Q divise P.

Exercice 10.

1. Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$? de $\mathbb{C}[X]$?
2. Factoriser les polynômes suivants en produit de polynômes irréductibles et unitaires de $\mathbb{R}[X]$:
   (a) $P(X) = 6X^2 - X - 1$,
   (b) $Q(X) = X^3 - X^2 + X - 1$,
   (c) $R(X) = X^5 + X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$.
3. Même question dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 11. Montrer que $X - 1$ divise $X^n - 1$ ($n \in \mathbb{N}^\star$).

Exercice 12. Montrer la proposition du cours suivante :

$$P(a) = 0 \text{ et } P'(a) = 0 \iff a \text{ est une racine de multiplicité } \geqslant 2.$$

Exercice 13.

1. Dans $\mathbb{R}[X]$, déterminer l'ensemble des polynômes P unitaires qui divisent $X^4 + 2X^2 + 1$.
2. Même question dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 14. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note R le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$.

1. Montrer que $\widetilde{R}(i) = \widetilde{P}(i)$. En déduire que $X^2 + 1$ divise P si et seulement si $\widetilde{P}(i) = 0$.
2. Pour quels entiers naturels n le polynôme $X^n + 1$ est-il un multiple de $X^2 + 1$?

Exercice 15. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k.$$

1. Calculer $P - P'$.
2. Montrer que toutes les racines complexes de P sont simples.

Exercice 16. Soient $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $P(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + aX + 1$.

1. On suppose que 1 est racine de P. Montrer que $(X - 1)^2$ divise P et déterminer le quotient de P par $(X - 1)^2$.
2. On suppose que -1 est racine de P. Montrer que $(X + 1)^2$ divise P et déterminer le quotient de P par $(X + 1)^2$.

Exercice 17.

1. Soit $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. On note α, β et γ les racines complexes de P. Montrer que l'on a
$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -a \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = b \\ \alpha\beta\gamma = -c \end{cases}.$$
2. *Application.* Résoudre le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$:
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ xy + xz + yz = 0 \\ xyz = 1 \end{cases}.$$

Exercice 18. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $\deg P \leqslant n$ et

$$XP(X - 1) = (X - 2)P(X).$$

1. Montrer que 0 et 1 sont racines de P.
2. On suppose que P admet une racine complexe a non entière.
   (a) Montrer que $a - 1$ et $a + 1$ sont aussi racines.
   (b) Montrer que P admet une infinité de racines.
   (c) En déduire que $P = 0$.