# Feuille d'exercices n°16 – Correction
# Polynômes

**Exercice 1.** Calculer $(X+1)^5-(X-1)^5$.

$$\begin{aligned}(X+1)^5-(X-1)^5 &= \left(X^5+5X^4+10X^3+10X^2+5X+1\right)\\ &\quad -\left(X^5-5X^4+10X^3-10X^2+5X-1\right)\\ &= 10X^4+20X^2+2.\end{aligned}$$

**Exercice 2.** Soient

$$P(X)=X^2-3X+2,\quad Q(X)=2\quad \text{et}\quad R(X)=2X+1.$$

1. Déterminer $\widetilde{P}(2)$, $\widetilde{P}(-2)$ et $\widetilde{Q}(-2)$.
2. Déterminer $P\circ R$, $R\circ P$, $P\circ P$ et $Q\circ P$.
   Déterminer le polynôme dérivé de chacun de ces polynômes.
3. Soit $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$. Déterminer $\widetilde{P}(A)$ et $\widetilde{Q}(A)$.
   Factoriser le polynôme $P$. En déduire une égalité matricielle.

1. $P(2)=0$ (donc 2 est une racine de $P$), $P(-2)=12$ et $Q(-2)=2$.

2. On a

$$\begin{aligned}P\circ R &= R^2-3R+2\\ &= (2X+1)^2-3(2X+1)+2\\ &= 4X^2-2X,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R\circ P &= 2P+1\\ &= 2(X^2-3X+2)+1\\ &= 2X^2-6X+5,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\circ P &= P^2-3P+2\\ &= X^4-6X^3+10X^2-3X\end{aligned}$$

et

$$Q\circ P=2.$$

Polynômes dérivés : $(P\circ R)'=8X-2$, $(R\circ P)'=4X-6$, $(P\circ P)'=4X^3-18X^2+20X-3$ et $(Q\circ P)'=0$.

3.

$$\begin{aligned}P(A) &= A^2-3A+2I\\ &= \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^2-3\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

et

$$Q(A)=2I=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}.$$

On a $P(X)=(X-1)(X-2)$. En particulier $(A-I)(A-2I)=A^2-3A+2I$.

**Exercice 3.** Soient $P$ et $Q$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que si les polynômes $P+Q$ et $P-Q$ sont constants, alors les polynômes $P$ et $Q$ sont constants.
2. Montrer que si le polynôme $P^2-Q^2$ est constant non nul, alors les polynômes $P$ et $Q$ sont constants.

1. Supposons que les polynômes $P+Q$ et $P-Q$ soient constants. Il existe alors $\alpha$ et $\beta$ des scalaires tels que $P+Q=\alpha$ et $P-Q=\beta$. Donc $P=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ et $Q=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$. Les polynômes $P$ et $Q$ sont donc constants.

2. Supposons que le polynôme $P^2-Q^2$ soit constant non nul.

Cela signifie qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^\star$ tel que $P^2-Q^2=\lambda$.

Donc $(P-Q)(P+Q)=\lambda$ (en particulier $P-Q\neq 0$ et $P+Q\neq 0$),

donc $\deg\left((P-Q)(P+Q)\right)=0$,

donc $\underbrace{\deg(P-Q)}_{\geqslant 0}+\underbrace{\deg(P+Q)}_{\geqslant 0}=0$,

d'où $\deg(P-Q)=0$ et $\deg(P+Q)=0$.

Les polynômes $P-Q$ et $P+Q$ étant constants, on conclut en utilisant le résultat de la question précédente que les polynômes $P$ et $Q$ sont constants.

**Exercice 4.** Déterminer l'ensemble des polynômes $P$ de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2)=(X^2+1)P(X)$.

On note $(E)$ l'équation $P(X^2)=(X^2+1)P(X)$ d'inconnue $P\in\mathbb{R}[X]$.

Le polynôme nul est solution de $(E)$ car $0=(X^2+1)\times 0$.

Le polynôme nul est le seul polynôme constant solution : en effet si $\lambda=(X^2+1)\lambda$, alors par identification des coefficients $\lambda=0$.

Soit $P$ un polynôme non constant solution de $(E)$.

Alors : $\deg(P(X^2))=\big(\deg(X^2+1)P(X)\big)$

$$\begin{aligned}&\Longrightarrow \deg P\times\deg(X^2)=\deg(X^2+1)+\deg P\\&\Longrightarrow 2\deg P=2+\deg P\\&\Longrightarrow \deg P=2.\end{aligned}$$

Ainsi si $P$ est solution de $(E)$, alors $P(X)=aX^2+bX+c$ avec $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Soit $P(X)$ un polynôme de la forme $aX^2+bX+c$.

$$\begin{aligned}&P \text{ est une solution de } (E)\\
&\Longleftrightarrow P(X^2)=(X^2+1)P(X)\\
&\Longleftrightarrow aX^4+bX^2+c=(X^2+1)\left(aX^2+bX+c\right)\\
&\Longleftrightarrow aX^4+bX^2+c=aX^4+bX^3+(a+c)X^2+bX+c\\
&\Longleftrightarrow \begin{cases}a=a\\0=b\\b=a+c\\0=b\\c=c\end{cases}\quad\text{(par unicité des coefficients d'un polynôme)}\\
&\Longleftrightarrow \begin{cases}a=a\\b=0\\c=-a\end{cases}\\
&\Longleftrightarrow P(X)=aX^2-a.\end{aligned}$$

Conclusion : L'ensemble des polynômes $P$ de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2)=(X^2+1)P(X)$ sont les polynômes $P(X)=aX^2-a$, avec $a\in\mathbb{R}$.

**Exercice 5.** Déterminer le degré de $(X^2+X+1)^n-aX^{2n}-bX^{2n-1}$ en fonction de $a$ et de $b$.

On peut montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$,

$$(X^2+X+1)^n=X^{2n}+nX^{2n-1}+\frac{n(n+1)}{2}X^{2n-2}+P_n,$$

où $P_n$ est un polynôme vérifiant $\deg(P_n)<2n-2$.

Ainsi

$$(X^2+X+1)^n-aX^{2n}-bX^{2n-1}=(1-a)X^{2n}+(n-b)X^{2n-1}+\frac{n(n+1)}{2}X^{2n+1}+P_n.$$

Conclusion :

$$\boxed{\begin{cases} \deg\left((X^2+X+1)^n - aX^{2n} - bX^{2n-1}\right) = 2n & \text{si } a \neq 1, \\ \deg\left((X^2+X+1)^n - aX^{2n} - bX^{2n-1}\right) = 2n-1 & \text{si } a = 1 \text{ et } b \neq n, \\ \deg\left((X^2+X+1)^n - aX^{2n} - bX^{2n-1}\right) = 2n-2 & \text{si } a = 1 \text{ et } b = n. \end{cases}}$$

**Exercice 6.** Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $A$ par $B$ :

1. $A(X) = X^7 + 2X^3 - X^2 + 1 \quad$ et $\quad B(X) = X^2 + X + 2$.
2. $A(X) = 2X^8 \quad$ et $\quad B(X) = X^3 - 2X^2 + 1$.
3. $A(X) = (1+i)X^4 - 5X^2 + (2i-1)X + 7 \quad$ et $B(X) = X^2 - iX + (i-1)$.

Division euclidienne de $A$ par $B$ : Il existe $Q$ et $R$ uniques tels que

$$A = BQ + R \text{ et } \deg R < \deg B.$$

$Q$ est appelé le quotient (et $R$ le reste) de la division euclidienne de $A$ par $B$.

1. $Q(X) = X^5 - X^4 - X^3 + 3X^2 + X - 8$ et $R(X) = 6X + 17$.

2. $Q(X) = 2X^5 + 4X^4 + 8X^3 + 14X^2 + 24X + 40$ et $R(X) = 66X^2 - 24X - 40$.

3. $Q(X) = (1+i)X^2 + (i-1)X - 4 - i$ et $R(X) = 2 + 3i$.

**Exercice 7.** Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n$ par :

1. $X + 1$,
2. $X^2 - 3X + 2$.

1. Il existe $Q(X)$ et $R(X)$ uniques tels que

$$X^n = (X+1)Q(X) + R(X) \quad \text{et} \quad \deg R < 1.$$

Donc $R(X) = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On a donc

$$X^n = (X+1)Q(X) + \lambda$$

En particulier

$$(-1)^n = (-1+1)Q(1) + \lambda,$$

c'est-à-dire $\lambda = (-1)^n$. Donc $R(X) = (-1)^n$.

Conclusion : Le reste de la division euslidienne de $X^n$ par $X+1$ est $(-1)^n$.

2. Il existe $Q(X)$ et $R(X)$ uniques tels que

$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q(X) + R(X) \quad \text{et} \quad \deg R < 2.$$

Donc $R(X) = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On a donc

$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q(X) + aX + b.$$

Pour déterminer $a$ et $b$, nous évaluons cette égalité en 1 et en 2 (il s'agit des racines du polynôme $X^2 - 3X + 2$). On obtient alors

$$\begin{cases} 1 = 0 \times Q(1) + a + b \\ 2^n = 0 \times Q(2) + 2a + b \end{cases},$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 2^n \end{cases},$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} a = 2^n - 1 \\ b = 2 - 2^n \end{cases}.$$

Donc $R(X) = (2^n - 1)X + 2 - 2^n$.

Conclusion : Le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $X^2 - 3X + 2$ est $R(X) = (2^n - 1)X + 2 - 2^n$.

**Exercice 8.** Soit $P(X) = X^4 + X^3 - 3X^2 - 5X - 2$.

1. Montrer que 2 est une racine simple de $P$.
2. Montrer que $-1$ est une racine triple de $P$.
3. En déduire la décomposition de $P$ en produit de facteurs irréductibles.

1. 2 est racine simple de $P \iff P(2)=0$ et $P'(2)\neq 0$ (à vérifier).

2. $-1$ est racine triple de $P \iff P(-1)=P'(-1)=P''(-1)=0$ et $P^{(3)}(-1)\neq 0$ (à vérifier).

3. $P$ étant un polynôme de degré 4, on a

$$P(X)=\underbrace{1}_{\text{coefficient dominant}}\times(X-2)\times(X-(-1))^3,$$

c'est-à-dire $\boxed{P(X)=(X-2)(X+1)^3.}$

**Exercice 9.** Soient $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$, $P(X)=X^5+X^4+\alpha X^3+\beta X^2+5X-2$ et $Q(X)=X^3-2X+1$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

Déterminer $\alpha$ et $\beta$ pour que $Q$ divise $P$.

On note $R$ le reste de la division euclidienne de $P$ par $Q$.

$Q$ divise $P$ si et seulement si $R$ est nul.

On détermine explicitement $R(X)$ en posant cette division euclidienne. On obtient

$$R(X)=(\beta+1)X^2+(2\alpha+8)X-\alpha-4.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} Q(X) \text{ divise } P(X) &\iff R(X)=0\\ &\iff (\beta+1)X^2+(2\alpha+8)X-\alpha-4=0\\ &\iff \begin{cases}\beta+1=0\\ 2\alpha+8=0\\ -\alpha-4=0\end{cases}\\ &\iff \beta=-1 \text{ et } \alpha=-4.\end{aligned}$$

Conclusion : $Q$ divise $P$ si et seulement si $\beta=-1$ et $\alpha=-4$.

**Exercice 10.** 1. Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ ? de $\mathbb{C}[X]$ ?

2. Factoriser les polynômes suivants en produit de polynômes irréductibles et unitaires de $\mathbb{R}[X]$ :
   (a) $P(X)=6X^2-X-1$,
   (b) $Q(X)=X^3-X^2+X-1$,
   (c) $R(X)=X^5+X^4+2X^3+2X^2+X+1$.
3. Même question dans $\mathbb{C}[X]$.

1. (Cours)

2. (a) Les racines de $P$ sont $-\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$. Donc $6X^2-X-1=6\left(X+\frac{1}{3}\right)\left(X-\frac{1}{2}\right)$.

2. (b) 1 est une racine évidente de $Q$. Donc $X-1$ divise $Q$. On montre que $Q(X)=(X-1)(X^2+1)$ irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

2. (c) $-1$ est une racine évidente de $R$. Donc $X+1$ divise $R$. On montre que

$$\begin{aligned} R(X)&=(X+1)(X^4+2X^2+1)\\ &=(X+1)(X^2+1)^2\\ &=(X+1)(X^2+1)(X^2+1),\end{aligned}$$

irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

3. (a) Dans $\mathbb{C}[X]$, $P(X)=\left(X+\frac{1}{3}\right)\left(X-\frac{1}{2}\right)$.

3. (b) Dans $\mathbb{C}[X]$, $Q(X)=(X+1)(X-i)(X+i)$.

3. (c) Dans $\mathbb{C}[X]$, $R(X)=(X+1)(X-i)^2(X+i)^2$.

**Exercice 11.** Montrer que $X-1$ divise $X^n-1$ ($n\in\mathbb{N}^\star$).

Proposition 10 : $X-1$ divise $X^n-1$ si et seulement si 1 est racine de $X^n-1$.
Or $1^n-1=0$, donc 1 est racine de $X^n-1$ et $X-1$ divise $X^n-1$.

**Exercice 12.** Montrer la proposition du cours suivante :

$$P(a)=0 \text{ et } P'(a)=0 \iff a \text{ est une racine de multiplicité } \geqslant 2.$$

Remarque : Dans la démonstration qui suit, on ne fait pas appel à la formule de Taylor (qui a été énoncée en cours sans être démontrée).

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que $P(a) = P'(a) = 0$. On sait qu'il existe $Q$ et $R$ uniques tels que

$$P(X) = (X-a)^2 Q(X) + R(X) \text{ et } \deg R < 2.$$

On sait donc que

$$(\star) \quad P(X) = (X-a)^2 Q(X) + \alpha X + \beta \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

En dérivant $(\star)$, on obtient

$$(\star\star) \quad P'(X) = 2(X-a)Q(X) + (X-a)^2 Q'(X) + \alpha.$$

En évaluant $(\star\star)$ en $a$, on trouve $P'(a) = \alpha$, donc $\alpha = 0$. On en déduit donc que $P(X) = (X-a)^2 Q(X) + \beta$. En évaluant cette dernière égalité en $a$, on obtient $P(a) = \beta$, c'est-à-dire $\beta = 0$. On a donc montré que $P(X) = (X-a)^2 Q(X)$ et que $a$ est une racine de $P$ de multiplicité $\geqslant 2$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $a$ est une racine de multiplicité $\geqslant 2$. Il existe $Q$ un polynôme tel que $P(X) = (X-a)^2 Q(X)$. On a donc

$$\begin{aligned} P'(X) &= \left[(X-a)^2 Q(X)\right]' \\ &= 2(X-a)Q'(X) + (X-a)^2 Q(X). \end{aligned}$$

D'où $P(a) = 0 \times Q(a) = 0$ et $P'(a) = 2 \times 0 \times Q'(a) + 0 \times Q(a) = 0$. Donc $P(a) = P'(a) = 0$.

**Exercice 13.**
1. Dans $\mathbb{R}[X]$, déterminer l'ensemble des polynômes $P$ unitaires qui divisent $X^4 + 2X^2 + 1$.
2. Même question dans $\mathbb{C}[X]$.

1. On a $X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2+1)^2$ (décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$). Il existe trois polynômes unitaires de $\mathbb{R}[X]$ qui divisent $X^4 + 2X^2 + 1$ : $(X^2+1)^0$, $\left(X^2+1\right)^1$ et $(X^2+1)^2$, c'est-à-dire $\boxed{1,\ X^2+1 \text{ et } (X^2+1)^2.}$

2. On a $X^4 + 2X^2 + 1 = (X+i)^2(X-i)^2$ (décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$). Il existe 9 polynômes unitaires de $\mathbb{C}[X]$ qui divisent $X^4 + 2X^2 + 1$ : ce sont les polynômes $(X+i)^k (X-i)^\ell$ où $k, \ell \in [\![0, 2]\!]$,

c'est-à-dire $1$, $X+i$, $X-i$, $(X+i)^2$, $(X-i)^2$, $(X+i)(X-i)$, $(X+i)^2(X-i)$, $(X+i)(X-i)^2$ et $(X-i)^2(X+i)^2$.

**Exercice 14.** Soit $P$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $R$ le reste de la division euclidienne de $P$ par $X^2+1$.
1. Montrer que $\widetilde{R}(i) = \widetilde{P}(i)$. En déduire que $X^2+1$ divise $P$ si et seulement si $\widetilde{P}(i) = 0$.
2. Pour quels entiers naturels $n$ le polynôme $X^n+1$ est-il un multiple de $X^2+1$ ?

1. On note $Q(X)$ le quotient de la division euclidienne de $P$ par $X^2+1$. On sait que

$$P(X) = (X^2+1)Q(X) + R(X) \quad (\star)$$

et que $\deg R < 2$.

En évaluant $(\star)$ en $i$, on obtient

$$P(i) = \underbrace{(i^2+1)}_{=0} Q(i) + R(i)$$

donc $P(i) = R(i)$.

Remarque utile : Comme $\deg R < 2$, on sait que $R(X) = aX + b$ avec $a, b$ des réels.

Montrons que $X^2+1$ divise $P$ si et seulement si $P(i) = 0$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Le sens direct est immédiat. Supposons que $X^2+1$ divise $P$, alors $R = 0$. En particulier $R(i) = 0$. Donc $P(i) = 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons à présent que $P(i) = 0$. Alors $R(i) = 0$, c'est-à-dire $a + ib = 0$, d'où $a = b = 0$ (un complexe est nul si et seulement sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles). On en déduit que $R(X) = 0$ (car $R(X) = aX + b$) et que $P(X) = (X^2+1)Q(X)$. On a donc montré que $X^2+1$ divise $P$.

Conclusion : $X^2+1$ divise $P$ si et seulement si $P(i)=0$.

2.

$$\begin{aligned} X^n+1 \text{ est un multiple de } X^2+1 &\iff X^2+1 \text{ divise } X^n+1 \\ &\iff i^n+1=0 \text{ (d'après Q1)} \\ &\iff i^n=-1 \\ &\iff n=2+4k \text{ avec } k\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

Conclusion : $X^n+1$ est un multiple de $X^2+1$ si et seulement si $n=2+4k$ avec $k\in\mathbb{N}$.

**Exercice 15.** Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose

$$P(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}X^k.$$

1. Calculer $P-P'$.
2. Montrer que toutes les racines complexes de $P$ sont simples.

1.

$$\begin{aligned} P-P' &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}X^k-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}kX^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}X^k-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}X^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}X^k-\sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{1}{\ell!}X^{\ell} \\ &= \frac{1}{n!}X^n. \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{P-P'=\frac{1}{n!}X^n.}$

2. Pour montrer que toutes les racines de $P$ sont simples, on procède par l'absurde. On suppose donc qu'il existe $a$ un racine de $P$ de multiplicité $\geqslant 2$. Alors $P(a)=0$ et $P'(a)=0$. En utilisant le résultat de la question précédente, on a $\frac{1}{n!}a^n=0$. D'où $a=0$. La contradiction vient du fait que $P(0)=1$ (0 n'est donc pas une racine de $P$). On en déduit que toutes les racines de $P$ sont simples.

**Exercice 16.** Soient $(a,b)\in\mathbb{K}^2$ et $P(X)=X^4+aX^3+bX^2+aX+1$.

1. On suppose que 1 est racine de $P$. Montrer que $(X-1)^2$ divise $P$ et déterminer le quotient de $P$ par $(X-1)^2$.
2. On suppose que $-1$ est racine de $P$. Montrer que $(X+1)^2$ divise $P$ et déterminer le quotient de $P$ par $(X+1)^2$.

1. On suppose que 1 est racine de $P$. Alors $P(1)=0$, c'est-à-dire $2a+b+2=0$.

Pour montrer que $(X-1)^2$ divise $P$ si et seulement si 1 est une racine de multiplicité $\geqslant 2$.

Il suffit donc de s'assurer que $P'(1)=0$.

On a $P'(1)=4a+2b+4=2(2a+b+2)=0$.

Conclusion : $(X-1)^2$ divise $P$.

On note $Q$ le quotient de la division de $P$ par $X^2-1$.

Conclusion : $Q(X)=X^2+(a+2)X+1$.

2. On suppose que $-1$ est racine de $P$. Alors $P(-1)=0$, c'est-à-dire $-2a+b+2=0$.

Montrons que $P'(-1)=0$ : $P'(-1)=-4+3a-2b+a=-2(-2a+b+2)=0$.

Conclusion : $(X+1)^2$ divise $P$.

On montre que lorsque $-1$ est racine de $P$, alors

$$P(X)=(X+1)^2(X^2+(a-2)X-1).$$

Conclusion : Le quotient de $P$ par $(X+1)^2$ est $X^2+(a-2)X-1$.

**Exercice 17.** 1. Soit $P(X)=X^3+aX^2+bX+c$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. On note $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ les racines complexes de $P$. Montrer que l'on a

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-a\\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=b\\ \alpha\beta\gamma=-c\end{cases}.$$

2. *Application.* Résoudre le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ xy + xz + yz = 0 \\ xyz = 1 \end{cases}.$$

1. $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ étant les racines complexes de $P$, on a $P(X) = 1(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$. En développant cette expression, on obtient

$$X^3 + aX^2 + bX + c = X^3 - (\alpha+\beta+\gamma)X^2 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)X - \alpha\beta\gamma.$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = -a \\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma = b \\ \alpha\beta\gamma = -c \end{cases}.$$

2. D'après la question précédente, les solutions de ce système sont les racines du polynôme

$$P(X) = X^3 - 0X^2 + 0X - 1,$$

c'est-à-dire $P(X) = X^3 - 1$. Il s'agit des racines cubiques de l'unité (cf cours sur les complexes) : $1$, $\omega$ et $\omega^2$ où $\omega = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Ce système admet 6 triplets solutions :

$$\mathscr{S} = \left\{(1,\omega,\omega^2), (1,\omega^2,\omega), (\omega,1,\omega^2), (\omega,\omega^2,1), (\omega^2,1,\omega), (\omega^2,\omega,1)\right\}.$$

**Exercice 18.** Soient $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $P$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $\deg P \leqslant n$ et

$$XP(X-1) = (X-2)P(X).$$

1. Montrer que 0 et 1 sont racines de $P$.
2. On suppose que $P$ admet une racine complexe $a$ non entière.
   (a) Montrer que $a-1$ et $a+1$ sont aussi racines.
   (b) Montrer que $P$ admet une infinité de racines.
   (c) Conclure.

1.

$$XP(X-1) = (X-2)P(X) \quad (\star)$$

En évaluant $(\star)$ en 0, on a $0 \times P(-1) = -2P(0)$, donc $P(0) = 0$ et 0 est racine de $P$.

Puis, en évaluant $(\star)$ en 1, on trouve $1 \times P(0) = -P(1)$, donc $P(1) = 0$ et 1 est une racine de $P$.

Conclusion : 0 et 1 sont des racines de $P$.

2. On suppose que $P$ admet une racine complexe $a$ non entière. Alors $P(a) = 0$.

(a) En évaluant $(\star)$ en $a$, on obtient $aP(a-1) = (a-2)P(a)$. Donc $aP(a-1) = 0$, or $a \neq 0$ (car $a \notin \mathbb{Z}$), d'où $P(a-1) = 0$. On a montré que $a-1$ est une racine de $P$.

Évaluons à présent $(\star)$ en $a+1$. On obtient $(a+1)P(a) = (a-1)P(a+1)$, donc $(a-1)P(a+1) = 0$ et $P(a+1) = 0$ car $a-1 \neq 0$ $(a-1 \notin \mathbb{Z})$. On a montré que $a+1$ est une racine de $P$.

Conclusion : $a-1$ et $a+1$ sont des racines de $P$.

(b) On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a-n$ et $a+n$ sont des racines de $P$. $P$ admet donc une infinité de racines.

(c) Un polynôme non nul de degré $n$ admet au plus $n$ racines. $P$ admettant une infinité de racines, $P = 0$.

**Exercice 19.** Factoriser $P(X) = X^3 + (1+\mathbf{i})X^2 + (\mathbf{i}-1)X - \mathbf{i}$ dans $\mathbb{C}[X]$ sachant qu'il admet une racine imaginaire pure.

$P(X) = (X+\mathbf{i})\left(X + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$

**Exercice 20.** On note $\alpha = \cos(2\pi/5)$ et $P(X) = 4X^2 + 2X - 1$.

1. Montrer que $\alpha$ est une racine de $P$. En déduire une expression pour $\alpha$.
   On pose $\omega = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{5}}$. On a

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= 4\left(\frac{\omega+\omega^{-1}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\omega+\omega^{-1}}{2}\right) - 1 \\ &= \omega^2 + \omega^{-2} + \omega + \omega^{-1} + 1 \\ &= \omega^2 + \omega^3 + \omega + \omega^4 + 1 && \text{car } \omega^5 = 1 \\ &= \frac{\omega^5 - 1}{\omega - 1} && \text{car } \omega \neq 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   On en déduit que $\alpha$ est une racine de $P$. Donc $\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Or $\alpha \geqslant 0$, donc $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
2. Montrer que l'autre racine de $P$ est $\cos(4\pi/5)$.
   On a

$$\begin{aligned} \cos(4\pi/5) &= \cos(2 \times 2\pi/5) \\ &= 2\alpha^2 - 1 \\ &= \frac{-1-\sqrt{5}}{4}. \end{aligned}$$