

Feuille d'exercices n°17 – Correction

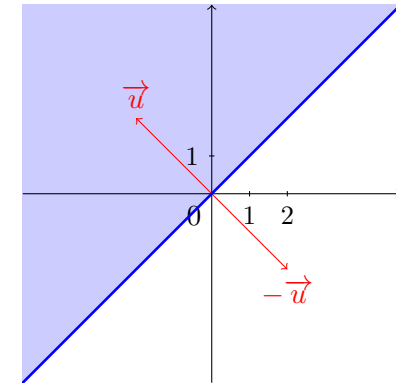
Espaces vectoriels

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des \mathbb{R} -espaces vectoriels ?

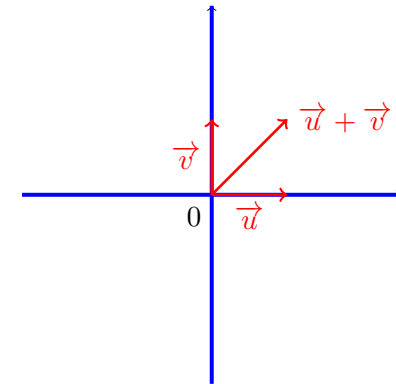
1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$.
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$.
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$.
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$.
5. $\{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
6. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$.
7. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
8. $E_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = P(2)\}$.
9. $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(0) = 2\}$.
10. Pour $A \in \mathbb{R}[X]$ non nul fixé, $E_3 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid A \text{ divise } P\}$.
11. E_4 , l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$, où a est une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
12. E_5 , l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = x$, où a est une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Correction

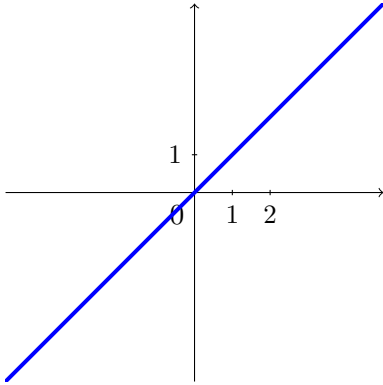
1. On note $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$. $F \subset \mathbb{R}^2$ et $0_{\mathbb{R}^2} \notin F$ (car $0 + 0 \neq 1$). F n'est pas un \mathbb{R} -espace vectoriel.
2. On note $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$. $\vec{u}(-2, 2) \in F$, mais $-\vec{u}(2, -2) \notin F$. Donc F n'est pas un \mathbb{R} -espace vectoriel.



3. On note $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$. $\vec{u}(1, 0)$ et $\vec{v}(0, 1)$ appartiennent à F , mais $\vec{u} + \vec{v} \notin F$. Donc F n'est pas un \mathbb{R} -espace vectoriel.



4. On note $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$.



- $F \subset \mathbb{R}^2$ (qui est un \mathbb{R} -espace vectoriel de référence).
- $(0, 0) \in F$.
- Soient α, β des réels et $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{u}'(x', y')$ des vecteurs de F .
 $\alpha \vec{u} + \beta \vec{u}' = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') \in F$ car $x = y$ et $x' = y'$.
 Ainsi pour tout α, β réels et pour tout $\vec{u}, \vec{u}' \in F$,

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{u}' \in F.$$

Conclusion : F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 . D'où F est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

5. On note $F = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

- $F \subset \mathbb{R}^3$ (qui est un \mathbb{R} -espace vectoriel de référence).
- $(0, 0, 0) \in F$.
- Soient α, β des réels et $\vec{u}(x, 2x, 3x)$ et $\vec{u}'(x', 2x', 3x')$ des vecteurs de F .

$$\begin{aligned} \alpha \vec{u} + \beta \vec{u}' &= (\alpha x + \beta x', 2\alpha x + 2\beta x', 3\alpha x + 3\beta x') \\ &= \underbrace{(\alpha x + \beta x', 2(\alpha x + \beta x'), 3(\alpha x + \beta x'))}_{\in F} \end{aligned}$$

Ainsi pour tout α, β réels et pour tout $\vec{u}, \vec{u}' \in F$, $\alpha \vec{u} + \beta \vec{u}' \in F$.

Conclusion : F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . D'où F est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

6. On note $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$.

- $F \subset \mathbb{R}^3$ (qui est un \mathbb{R} -espace vectoriel de référence).
- $(0, 0, 0) \in F$.
- Soient α, β des réels et $\vec{u}(x, 0, z)$ et $\vec{u}'(x', 0, z')$ des vecteurs de F .

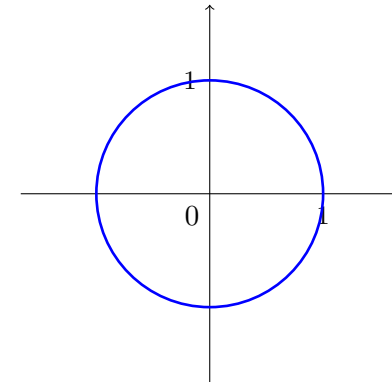
$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{u}' = \underbrace{(\alpha x + \beta x', 0, \alpha z + \beta z')}_{\in F}$$

Ainsi pour tout α, β réels et pour tout $\vec{u}, \vec{u}' \in F$, $\alpha \vec{u} + \beta \vec{u}' \in F$.

Conclusion : F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . D'où F est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

7. On note $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

$(0, 0) \notin F$ donc F n'est pas un \mathbb{R} -espace vectoriel.



8.

- $E_1 \subset \mathbb{R}[X]$ (qui est un \mathbb{R} -espace vectoriel de référence).
- Le polynôme nul appartient à E_1 ($P \leftarrow 0$).
- Soient α, β des réels et P, Q deux polynômes de E_1 . On a

$$\begin{aligned} (\alpha P + \beta Q)(0) &= \alpha P(0) + \beta Q(0) \\ &= \alpha P(2) + \beta Q(2) \quad (\text{car } P, Q \in E_1) \\ &= (\alpha P + \beta Q)(2). \end{aligned}$$

Donc $\alpha P + \beta Q \in E_1$.

Conclusion : E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Donc E_1 est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

9. E_2 n'est pas un \mathbb{R} -espace vectoriel car $0 \notin E_2$ (si $P = 0$, alors $P'(0) = 0 \neq 2$).

10.

- $E_3 \subset \mathbb{R}[X]$ (qui est un \mathbb{R} -espace vectoriel de référence).
- Le polynôme nul appartient à E_3 car A divise 0 ($0 = A \times 0$).
- Soient α, β des réels et P, Q deux polynômes de E_3 . Alors $P = A \times P_1$ et $Q = A \times Q_1$. On a

$$\begin{aligned} \alpha P + \beta Q &= \alpha A \times P_1 + \beta A \times Q_1 \\ &= A \times (\alpha P_1 + \beta Q_1) \end{aligned}$$

Donc $\alpha P + \beta Q \in E_3$.

Conclusion : E_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Donc E_3 est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

11. $E_4 = \{f(x) = Ce^{-A(x)} \mid C \in \mathbb{R}\}$.

E_4 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (cf. exercice 2 du cours).

E_4 est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

12. E_5 n'est pas un \mathbb{R} -espace vectoriel car il ne contient pas la fonction nulle. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$0 + a(x) \times 0 = 0 \quad (y \leftarrow 0).$$

Exercice 2. Montrer que les ensembles suivants, munis des opérations classiques, sont des \mathbb{R} -espaces vectoriels.

1. l'ensemble des nombres complexes imaginaires purs.
2. l'ensemble des fonctions dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
3. l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^t M = M\}$ des matrices symétriques de taille $n \times n$.
5. l'ensemble des fonctions paires (impaires) de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
6. l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ (avec $n \in \mathbb{N}$ fixé).

Correction

1. $i\mathbb{R} = \{iy \mid y \in \mathbb{R}\}$.

- $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (qui est un \mathbb{R} -espace vectoriel de référence).
- $0 \in i\mathbb{R}$ (car $0 = i \times 0$).
- Soient α, β des réels et $z, z' \in i\mathbb{R}$. Alors $z = iy$ et $z' = iy'$ avec $y, y' \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} \alpha z + \beta z' &= \alpha iy + \beta iy' \\ &= i \underbrace{(\alpha y + \beta y')}_{\in \mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Donc $\alpha z + \beta z' \in i\mathbb{R}$.

Conclusion : $i\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{C} et donc un \mathbb{R} -espace vectoriel.

2. On note $D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

- $D(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (qui est un \mathbb{R} -espace vectoriel de référence).
- $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \in D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (la fonction nulle est dérivable).
- Soient α, β des réels et $f, g \in D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La fonction $\alpha f + \beta g$ est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x).$$

Donc $\alpha f + \beta g \in D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Conclusion : $D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et donc un \mathbb{R} -espace vectoriel.

3. On note $D_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- $D_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (qui est un \mathbb{R} -espace vectoriel de référence).
- La matrice nulle est diagonale donc $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \in D_n(\mathbb{R})$.

- Soient α, β des réels et $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$, $B =$

$$\begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$
 deux matrices de $D_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha a_2 + \beta b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha a_n + \beta b_n \end{pmatrix}.$$

Donc $\alpha A + \beta B \in D_n(\mathbb{R})$.

Conclusion : $D_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc un \mathbb{R} -espace vectoriel.

4. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (qui est un \mathbb{R} -espace vectoriel de référence).
 - La matrice nulle est symétrique donc $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
 - Soient α, β des réels et $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrons que $\alpha A + \beta B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A + \beta B$. On a :

$$\begin{aligned} (\alpha A + \beta B)^T &= \alpha A^T + \beta B^T \\ &= \alpha A + \beta B \quad (\text{car } A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})). \end{aligned}$$

Donc $\alpha A + \beta B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Conclusion : $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc un \mathbb{R} -espace vectoriel.

5. On note $P(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions paires de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Rappel : $f \in P(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \iff \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$.

- $P(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (qui est un \mathbb{R} -espace vectoriel de référence).
- $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \in P(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (la fonction nulle est paire ($f \leftarrow 0$)).
- Soient α, β des réels et $f, g \in P(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrons que la fonction $\alpha f + \beta g$ est paire. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)(-x) &= \alpha f(-x) + \beta g(-x) \\ &= \alpha f(x) + \beta g(x) \quad (\text{car } f \text{ et } g \text{ sont paires}). \end{aligned}$$

Donc $\alpha f + \beta g \in P(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Conclusion : $P(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et donc un \mathbb{R} -espace vectoriel.

6. On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n .

- $\mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{R}[X]$ (qui est un \mathbb{R} -espace vectoriel de référence).
- $0 \in \mathbb{R}_n[X]$.
- Soient α, β des réels et $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors

$$\deg(\alpha P + \beta Q) \leq n.$$

Donc $\alpha P + \beta Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

Conclusion : $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Donc $\mathbb{R}_n[X]$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Exercice 3. Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ et

$$G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer $F \cap G$.

Correction

1.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \iff \boxed{x} + y - z = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusion : $F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$

Donc F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

$$\begin{aligned} G &= \left\{ \begin{pmatrix} a-b \\ a+b \\ a-3b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Conclusion : $G = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right).$

Donc G est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

2. On sait que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \cap G &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in G \text{ et } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \\ &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ a+b \\ a-3b \end{pmatrix} \text{ et } x+y-z=0 \\ &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ a+b \\ a-3b \end{pmatrix} \\ &\hspace{15em} \text{et } (a-b) + (a+b) - (a-3b) = 0 \\ &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ a+b \\ a-3b \end{pmatrix} \text{ et } a = -3b \\ &\iff \exists b \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3b-b \\ -3b+b \\ -3b-3b \end{pmatrix} \\ &\iff \exists b \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4b \\ -2b \\ -6b \end{pmatrix} \\ &\iff \exists b \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion : $F \cap G = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$

Exercice 4. Soit $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Correction

- $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (qui est un \mathbb{R} -espace vectoriel de référence).

- La suite nulle appartient à F (car $\forall n \in \mathbb{N}, 0 = n \times 0 + 0$).
- Soient α, β des réels et $(u_n), (v_n)$ deux suites de F . On pose $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons que la suite (w_n) appartient à F . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} w_{n+2} &= \alpha u_{n+2} + \beta v_{n+2} \\ &= \alpha (nu_{n+1} + u_n) + \beta (nv_{n+1} + v_n) \\ &= n(\alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1}) + (\alpha u_n + \beta v_n) \\ &= nw_{n+1} + w_n. \end{aligned}$$

Donc $(w_n) \in F$, c'est-à-dire $(\alpha u_n + \beta v_n) \in F$.

Conclusion : F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Donc F est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Exercice 5. Les familles suivantes de vecteurs de \mathbb{R}^3 sont-elles libres ? Si ce n'est pas le cas, déterminer une relation linéaire liant ces vecteurs :

1. (v_1, v_2) avec $v_1 = (1, 0, 1)$ et $v_2 = (1, 2, 2)$.
2. (v_1, v_2, v_3) avec $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ et $v_3 = (1, 1, 1)$.
3. (v_1, v_2, v_3) avec $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 1, -1)$ et $v_3 = (1, -1, -2)$.
4. (v_1, v_2, v_3) avec $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (2, -1, 3)$ et $v_3 = (-1, 1, -1)$.

Exercice 6. 1. Trouver deux vecteurs engendrant le plan de \mathbb{R}^3 d'équation $x + y + z = 0$.

2. Trouver l'équation du plan de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs $v_1 = (1, 0, 1)$ et $v_2 = (1, -1, -1)$.

Exercice 7. Trouver la dimension des \mathbb{R} -espaces vectoriels suivants et en donner une base.

1. $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$.
2. $\mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N}$.
3. $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R}), p, q \in \mathbb{N}$.
4. l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré $\leq n, n \in \mathbb{N}$.
5. l'espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques de taille $n, n \in \mathbb{N}$.
6. l'espace $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques de taille $n, n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. Soient $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 0)$.

1. Montrer que les vecteurs v_1, v_2 et v_3 forment une base de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer dans cette base les coordonnées du vecteur $v = (1, 1, 1)$.

Exercice 9. 1. Les familles suivantes de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ sont-elles libres ?

- (a) (P_1, P_2, P_3) avec $P_1 = 1, P_2 = 1 + 2X$ et $P_3 = 1 + X + X^4$.
- (b) (P_1, P_2, P_3) avec $P_1 = 1 + X^2, P_2 = 1 - X + X^2$ et $P_3 = 1 + 2X + X^2$.

2. Soient $P_1 = 1, P_2 = 1 + X$ et $P_3 = 1 + X + X^2$.

- (a) Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3) forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
- (b) Déterminer les coordonnées de $P = 2 + 3X - X^2$ dans cette base.

Exercice 10. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Décrire l'ensemble \mathcal{H} des éléments $X \in \mathbb{R}^3$ tels que l'on ait $A.X = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Exercice 11. On considère les vecteurs suivants de \mathbb{R}^4 :

$$u_1 = (1, -2, 1, 2), u_2 = (1, -3, 1, 2), u_3 = (2, -4, 3, 4) \text{ et } u_4 = (1, -1, 2, 3).$$

1. Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de \mathbb{R}^4 .

2. Soient a, b, c, d des nombres réels. Calculer les coordonnées du vecteur (a, b, c, d) dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4) .
3. Calculer les coordonnées, dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4) , de chacun des vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^4 .

Exercice 12. Parmi les sous-ensembles suivants de \mathbb{R}^4 , préciser lesquels sont des sous-espaces vectoriels et lorsque c'est le cas, en donner une base :

1. $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - y + t = 0\}$.
2. $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2z + t = 1\}$.
3. $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + t = 0 \text{ et } 2x + y - z = 0\}$.
4. $\{(3a + b, a - b, a + 5b, 2a + b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Correction

$$F_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - y + t = 0\}.$$

F_1 est-il un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 ?

F_1 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 parce qu'il s'agit des solutions d'une équation linéaire homogène.

Lorsque la description est une équation, il faut commencer par résoudre cette équation (ou système).

$$\begin{aligned} & 3x - y + t = 0 \\ & \sim (\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 0 \end{array}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - y + t = 0 & \iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = z \\ t = -3x + y \end{cases}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \\ & \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -3x + y \end{pmatrix}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \\ & \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ -3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}}_{v_1} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} + z \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - y + t = 0\} \\ &= \text{Vect}(v_1, v_2, v_3) \end{aligned}$$

Donc (v_1, v_2, v_3) est une famille génératrice de F_1 .

De plus, (v_1, v_2, v_3) est libre (le vérifier). Donc (v_1, v_2, v_3) constitue une base de F_1 .

$$F_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2z + t = 1\}.$$

$(0, 0, 0, 0) \notin F_2$ donc F_2 n'est pas un \mathbb{R} -espace vectoriel.

$$F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + t = 0 \text{ et } 2x + y - z = 0 \right\}.$$

$$(S) \begin{cases} x + t = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

F_3 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 car il s'agit des solutions de (S) , système linéaire homogène.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$(S) \iff \begin{cases} \boxed{x} = -t \\ \boxed{y} = z + 2t \\ z = z \\ t = t \end{cases} \quad (z, t) \in \mathbb{R}^2 \\ \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ z + 2t \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad (z, t) \in \mathbb{R}^2 \\ \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ 2t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$F_3 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

donc la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de F_3 .

De plus, cette famille est libre (coordonnées non proportionnelles). La famille

$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ constitue donc une base de F_3 .

$$F_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 3a + b \\ a - b \\ a + 5b \\ 2a + b \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

$$\begin{pmatrix} 3a + b \\ a - b \\ a + 5b \\ 2a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ a \\ a \\ 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 5b \\ b \end{pmatrix} \\ = a \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $F_4 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ (j'ai donc démontré que F_4 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4)

Conclusion : $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une famille génératrice de F_4 . Cette

famille étant également libre (coordonnées non proportionnelles), il s'agit d'une base de F_4 .

Exercice 13. Vérifier que les ensembles suivants, munis des opérations classiques, sont des \mathbb{R} -espaces vectoriels et déterminer une base de ces espaces :

1. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + y = y + z = 0\}$.
2. $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tels que } P(X) = P(1 - X)\}$.

3. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ telles que } u_n + u_{n+1} = 0\}$.

Exercice 14. On considère les vecteurs suivants de \mathbb{R}^3 :

$$u = (2, 3, -1), v = (1, -1, -2), x = (3, 7, 0) \text{ et } y = (5, 0, -7).$$

On note $F = \text{Vect}(u, v)$ et $G = \text{Vect}(x, y)$.

1. Montrer que l'on a $F = G$.
2. Trouver une équation de F .

Correction. 1. $u_1 = u_3 + 4u_4$ donc $u_1 \in \text{Vect}(u_3, u_4)$.

$u_2 = 2u_3 + 7u_4$ donc $u_2 \in \text{Vect}(u_3, u_4)$.

Donc $\text{Vect}(u_1, u_2) \subset \text{Vect}(u_3, u_4)$.

(u_1, u_2) est une base de $\text{Vect}(u_1, u_2)$ (le justifier), donc $\dim(\text{Vect}(u_1, u_2)) = \text{Card}(u_1, u_2) = 2$. De même $\dim(\text{Vect}(u_3, u_4)) = 2$.

Comme $\text{Vect}(u_1, u_2) \subset \text{Vect}(u_3, u_4)$ et $\dim(\text{Vect}(u_1, u_2)) = \dim(\text{Vect}(u_3, u_4))$, on a $\text{Vect}(u_1, u_2) = \text{Vect}(u_3, u_4)$.

2. Montrer que (u_1, u_2) est libre.

On suppose $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0$. Alors
$$\begin{cases} -3\lambda_1 - 5\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases}, \text{ donc } \lambda_2 = 0 \text{ et}$$

$\lambda_1 = -2\lambda_2 = 0$. Les vecteurs u_1 et u_2 sont donc linéairement indépendants.

On complète la famille libre (u_1, u_2) avec deux vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^4 .

Montrons que (u_1, u_2, e_1, e_2) constitue une base de \mathbb{R}^4 .

On suppose $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 e_1 + \lambda_4 e_4 = 0$. Alors
$$\begin{cases} -3\lambda_1 - 5\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases},$$

donc
$$\begin{cases} \lambda_2 = 0 & (L_3) \\ \lambda_1 = -\lambda_2 = 0 & (L_4) \\ \lambda_3 = 3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 & (L_1) \\ \lambda_4 = -\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 & (L_2) \end{cases}.$$
 La famille (u_1, u_2, e_1, e_2) est donc libre.

De plus $\text{Card}(u_1, u_2, e_1, e_2) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$, donc (u_1, u_2, e_1, e_2) est une base de \mathbb{R}^4 .

Exercice 15. Soit a un nombre réel. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs $(a + 2, a, a - 2)$, $(1, a, -1)$ et $(a, -a, 1)$?

Exercice 16. On considère les vecteurs suivants de \mathbb{R}^4 :

$$u_1 = (-3, 1, 0, 2), u_2 = (-5, 2, 1, 2), u_3 = (1, 1, 4, -6) \text{ et } u_4 = (-1, 0, -1, 2).$$

1. Montrer que $\text{Vect}(u_1, u_2) = \text{Vect}(u_3, u_4)$.
2. Montrer que les vecteurs u_1 et u_2 sont linéairement indépendants. Compléter ces vecteurs pour former une base de \mathbb{R}^4 .

Exercice 17. Dans \mathbb{R}^4 , on considère les vecteurs

$$u = (1, 0, 1, 0), v = (0, 1, -1, 0), w = (1, 1, 1, 1), x = (0, 0, 1, 0) \text{ et } y = (1, 1, 0, -1)$$

Soient $F = \text{Vect}(u, v, w)$ et $G = \text{Vect}(x, y)$.

Quelles sont les dimensions de F , G , $F + G$ et $F \cap G$?

Correction. On détermine le rang de la famille (u, v, w) en opérant sur les colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & -1 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $\dim(F) = \text{rg}(u, v, w) = 3$.

La famille (x, y) est une famille génératrice de G et est libre (coordonnées non proportionnelles). La famille (x, y) constitue donc une base de G et $\dim(G) = \text{Card}(x, y) = 2$.

On a $F + G = \text{Vect}(u, v, w) + \text{Vect}(x, y) = \text{Vect}(u, v, w, x, y)$.

On détermine le rang de la famille (u, v, w, x, y) en opérant sur les colonnes

de la matrice

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_5 \leftarrow C_5 - C_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \\ C_5 \leftarrow C_5 - C_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{-1} & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} C_4 \leftarrow C_4 - C_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} C_5 \leftarrow C_5 - C_4 \end{array}$$

Ainsi $\dim(F + G) = \text{rg}(u, v, w, x, y) = 4$.

D'après la formule de Grassmann, $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ et donc

$$4 = 2 + 3 - \dim(F \cap G) \quad \text{ie} \quad \dim(F \cap G) = 1.$$

Remarque : Les espaces F et G ne sont pas en somme directe car $F \cap G \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

Exercice 18. Dans \mathbb{R}^3 , déterminer une base et un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $F = \text{Vect}(u, v)$ où $u = (1, 1, 0)$ et $v = (2, 1, 1)$,
2. $F = \text{Vect}(u, v, w)$ où $u = (-1, 1, 0)$, $v = (2, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 1)$,
3. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$.

Exercice 19. On considère dans \mathbb{R}^4 les cinq vecteurs suivants :

$$v_1 = (1, 0, 0, 1), v_2 = (0, 0, 1, 0), v_3 = (0, 1, 0, 0), v_4 = (0, 0, 0, 1) \text{ et } v_5 = (0, 1, 0, 1).$$

Dire si les sous-espaces vectoriels suivants sont supplémentaires dans \mathbb{R}^4 .

1. $\text{Vect}(v_1, v_2)$ et $\text{Vect}(v_3)$?
2. $\text{Vect}(v_1, v_2)$ et $\text{Vect}(v_4, v_5)$?
3. $\text{Vect}(v_1, v_3, v_4)$ et $\text{Vect}(v_2, v_5)$?
4. $\text{Vect}(v_1, v_4)$ et $\text{Vect}(v_3, v_5)$?

Correction. Rappel :

$$\begin{aligned} F \oplus G = E &\iff F + G = E \text{ et } F \cap G = \{0\} \\ &\iff \dim(F + G) = \dim(E) \text{ et } \dim(F \cap G) = 0. \end{aligned}$$

1. On pose $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$ et $G = \text{Vect}(v_3)$. Donc $F + G = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ et $\dim(F + G) \leq 3$. D'où $\dim(F + G) \neq \dim(\mathbb{R}^4)$.

Conclusion : F et G ne sont pas des sous-espaces vectoriels supplémentaires de \mathbb{R}^4 .

2. On pose $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$ et $G = \text{Vect}(v_4, v_5)$. La famille (v_1, v_2) constitue une base de F (le vérifier) et $\dim(F) = \text{Card}(v_1, v_2) = 2$. De même, $\dim(G) = 2$.

$F + G = \text{Vect}(v_1, v_2, v_4, v_5)$. On détermine le rang de la famille (v_1, v_2, v_4, v_5) en opérant sur les colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} \quad C_4 \leftarrow C_4 - C_3$$

Ainsi $\dim(F + G) = \text{rg}(v_1, v_2, v_4, v_5) = 4$, donc $F + G = \mathbb{R}^4$.

On en déduit, en appliquant la formule de Grassmann, que

$$\begin{aligned} \dim(F \cap G) &= \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

Conclusion : $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

3. On pose $F = \text{Vect}(v_1, v_3, v_4)$ et $G = \text{Vect}(v_2, v_5)$.