Feuille d'exercices n°18
Applications linéaires

Définitions

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Si oui, déterminer leur noyau et leur image. Préciser alors si elles sont injectives, surjectives ou bijectives.

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x + y + 2z$;
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y + 1$;
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy$;
4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x - z$;
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos x$;
6. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (0, 2x + y, x + 3y)$;
7. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x - y, x + y, xy)$.

Exercice 2. On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $J : E \to \mathbb{R}$ définie par $J(f) = \int_0^1 f(t)dt$. Montrer que J est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et déterminer son automorphisme réciproque.

Exercice 4. On considère les applications

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (x, 2x + y, y) \end{array}$$

et

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y, 5x - 2y + z) \end{array}.$$

1. Montrer que f et g sont des applications linéaires.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}f$, $\mathrm{Ker}g$, $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Im}g$. Que peut-on en déduire ?
3. Montrer que $g \circ f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(-1), P(0), P(1)) \end{array}$.

Montrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z) \end{array}$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Calculer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$. En déduire une base de $\mathrm{Im}f$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}f$.
4. L'application f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 7. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.

Représentation matricielle et rang

Exercice 8. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $\dim(\mathrm{Ker} f)$ et $\mathrm{rg}(f)$.

Exercice 9. Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes et interpréter le résultat.

1. Dans $\mathbb{R}^4$: $\mathscr{F} = (x_1, x_2, x_3)$, où
$$x_1 = (1,1,1,1),\ x_2 = (1,-1,1,-1) \text{ et } x_3 = (1,0,1,0).$$
2. Dans $\mathbb{R}^4$: $\mathscr{F} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, où
$$x_1 = (1,1,0,1),\ x_2 = (1,-1,1,0),\ x_3 = (2,0,1,1) \text{ et } x_4 = (0,2,-1,1).$$
3. Dans $\mathbb{R}_2[X]$: $\mathscr{F} = (P_1, P_2, P_3)$, où
$$P_1 = X^2,\ P_2 = X^2 + 2X \text{ et } P_3 = X + 1.$$
4. Dans $\mathbb{R}_2[X]$: $\mathscr{F} = (P_1, P_2, P_3)$, où
$$P_1 = X^2 + 2X + 1,\ P_2 = X^2 - X + 1 \text{ et } P_3 = X^2 - 7X + 1.$$

Exercice 10. Déterminer les matrices dans les bases canoniques et le rang des applications linéaires suivantes :

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y, y-z) \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x - 5y + 4z \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P - XP' \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & \big(P(-1), P(0), P(1)\big) \end{array}$

Exercice 11. Soit $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \mapsto & (-x+y, x-y, -x+z, -y+z) \end{array}$.

1. Montrer que u est linéaire.
2. Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{C} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$.
3. Montrer que $\mathscr{F} = (f_1, f_2, u(e_1), u(e_2))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
4. Écrire la matrice de u dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{F}$.

Exercice 12. Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $w_1 = (1,-2,0)$, $w_2 = (-1,2,0)$, $w_3 = (0,0,2)$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(e_1) = w_1, u(e_2) = w_2, u(e_3) = w_3.$$

1. (a) Exprimer w_1, w_2, w_3 en fonction de e_1, e_2 et e_3. En deduire la matrice de u dans $\mathscr{B}$.
   (b) Déterminer l'expression de u.
2. (a) Trouver une base de $\mathrm{Ker}(u)$ et une base de $\mathrm{Im}(u)$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}^3$.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(u - Id)$ et $\mathrm{Im}(u - Id)$ où Id désigne l'identité de $\mathbb{R}^3$. En deduire que $u - Id$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 13. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{C} = (f_1, f_2)$ celle de $\mathbb{R}^2$. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

On pose
$$e'_1 = e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_3 + e_1, \quad e'_3 = e_1 + e_2$$
et
$$f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \quad f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

1. Montrer que $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis que $\mathscr{C}' = (f'_1, f'_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Quelle est la matrice de u dans ces nouvelles bases ?

Exercice 14. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille définie par

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ e'_2 = e_1 - e_3 \\ e'_3 = e_1 - e_2 \end{cases}.$$

1. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E.
2. On pose $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$. Déterminer la matrice D.
3. On note P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Déterminer P et calculer P^{-1}.
4. Quelle relation lie les matrices A, D, P et P^{-1} ?
5. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ représenté dans la base canonique $\mathscr{B}$ par :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $\mathscr{C} = (e'_1, e'_2, e'_3)$ avec $e'_1 = (1,0,1)$, $e'_2 = (-1,1,0)$ et $e'_3 = (1,1,1)$. Montrer que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de f dans $\mathscr{C}$.
3. Calculer la matrice de f^n dans $\mathscr{B}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Projections et symétries

Exercice 16. Montrer que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (4x-2y, 6x-3y) \end{array}$$

est une projection et déterminer ses caractéristiques géométriques.

Exercice 17. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une symétrie et déterminer ses caractéristiques géométriques.

Exercice 18. On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère le plan $\mathscr{P}$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équations respectives :

$$\mathscr{P} : x + 2y - z = 0 \quad \text{et} \quad \mathscr{D} : \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont supplémentaires. Trouver une base de $\mathscr{P}$ et une base de $\mathscr{D}$. On note $\mathscr{B}'$ la réunion de ces deux bases.
2. On note p la projection sur $\mathscr{P}$ parallèlement à $\mathscr{D}$. Déterminer la matrice de p dans la base $\mathscr{B}'$. En déduire la matrice de p dans la base canonique $\mathscr{B}$.
3. Faire de même avec la symétrie s par rapport à $\mathscr{P}$ parallèlement à $\mathscr{D}$.