Feuille d'exercices n°18 – Correction
Applications linéaires

Définitions

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Si oui, déterminer leur noyau et leur image. Préciser alors si elles sont injectives, surjectives ou bijectives.

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x + y + 2z$;
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y + 1$;
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy$;
4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x - z$;
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos x$;
6. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (0, 2x + y, x + 3y)$;
7. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x - y, x + y, xy)$.

Correction.

1. **Linéarité** : Soient $X = (x, y, z), X' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda X + X') &= f\left(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z'\right) \\ &= (\lambda x + x') + (\lambda y + y') + 2(\lambda z + z') \\ &= (\lambda x + \lambda y + 2\lambda z) + (x' + y' + 2z') \\ &= \lambda(x + y + 2z) + (x' + y' + 2z') \\ &= \lambda f(x, y, z) + f(x', y,', z') \\ &= \lambda f(X) + f(X'). \end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $X, X' \in \mathbb{R}^3$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda X + X') = \lambda f(X) + f(X')$. Donc $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

Injective ?

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f(x, y, z) = 0 \\ &\iff \boxed{x} + y + 2z = 0 \\ &\iff \begin{cases} x = -y - 2z \\ y = y \\ z = z \end{cases} \quad \text{avec } (y, z) \in \mathbb{R}^2 \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } (y, z) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

On note $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a montré que

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(u, v)\,.$$

De plus, (u, v) est libre (coordonnées non proportionnelles).

La famille (u, v) constitue donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right) = 2$.

Comme $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, f n'est pas injective.

Surjective ?

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(f) &= f\left(\mathbb{R}^3\right)\\ &= \operatorname{Vect}\left(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\right)\\ &= \operatorname{Vect}\left(1,1,2\right)\\ &= \operatorname{Vect}\left(\boxed{1}, 0, 0\right)\\ &= \operatorname{Vect}(\boxed{1}).\end{aligned}$$

$\operatorname{Im}(f) \subset \mathbb{R}$ et $\dim\left(\operatorname{Im}(f)\right) = 1 = \dim\left(\mathbb{R}\right)$, donc $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Comme $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$, f est surjective.

Bijective ? f n'est pas bijective.

2. **Linéarité** : f n'est pas linéaire car $f(0,0) \neq 0$.

3. **Linéarité** : f n'est pas linéaire car $f(0,1) + f(1,0) \neq f(1,1)$.

4. **Linéarité** : Soient $X = (x,y,z), X' = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}f(\lambda X + X') &= f\left(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z'\right)\\ &= (\lambda x + x') - (\lambda z + z')\\ &= (\lambda x - \lambda z) + (x' - z')\\ &= \lambda f(x,y,z) + f(x', y,', z')\\ &= \lambda f(X) + f(X').\end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $X, X' \in \mathbb{R}^3$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda X + X') = \lambda f(X) + f(X')$. Donc $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

Injective ?

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in \operatorname{Ker}(f) &\iff f(x,y,z) = 0\\ &\iff \boxed{x} - z = 0\\ &\iff \begin{cases} x = z\\ y = y \\ z = z\end{cases} \text{avec } (y,z) \in \mathbb{R}^2\\ &\iff \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \quad \text{avec } (y,z) \in \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

On note $u = \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$. On a montré que

$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\left(u, v\right).$$

De plus, (u,v) est libre (coordonnées non proportionnelles).

La famille (u,v) constitue donc une base de $\operatorname{Ker}(f)$ et $\dim\left(\operatorname{Ker}(f)\right) = 2$.

Comme $\operatorname{Ker}(f) \neq \left\{0_{\mathbb{R}^3}\right\}$, f n'est pas injective.

Surjective ?

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(f) &= f\left(\mathbb{R}^3\right)\\ &= \operatorname{Vect}\left(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\right)\\ &= \operatorname{Vect}\left(1,0,-1\right)\\ &= \operatorname{Vect}\left(\boxed{1}, 0, 0\right)\\ &= \operatorname{Vect}(\boxed{1}).\end{aligned}$$

$\operatorname{Im}(f) \subset \mathbb{R}$ et $\dim\left(\operatorname{Im}(f)\right) = 1 = \dim\left(\mathbb{R}\right)$, donc $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Comme $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$, f est surjective.

Bijective ? f n'est pas bijective.

5. **Linéarité** : f n'est pas linéaire car $f(0) \neq 0$.

6. **Linéarité** : Soient $X = (x, y), X' = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(\lambda X + X') &= f\left(\lambda x + x', \lambda y + y'\right) \\
&= \left(0, 2(\lambda x + x') + (\lambda y + y'), (\lambda x + x') + 3(\lambda y + y')\right) \\
&= \left(0, \lambda(2x + y) + (2x' + y'), \lambda(x + 3y) + (x' + 3y')\right) \\
&= (0, \lambda(2x + y), \lambda(x + 3y)) + \left(0, 2x' + y', x' + 3y'\right) \\
&= \lambda\,(0, 2x + y, x + 3y) + \left(0, 2x' + y', x' + 3y'\right) \\
&= \lambda f(X) + f(X').
\end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $X, X' \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda X + X') = \lambda f(X) + f(X')$. Donc $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

Injective ?

$$\begin{aligned}
(x, y) \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f(x, y) = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\iff f(x, y) = (0, 0, 0) \\
&\iff (0, 2x + y, x + 3y) = (0, 0, 0) \\
&\iff \begin{cases} 0 = 0 \\ 2x + y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \\
&\iff (x, y) = (0, 0)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{(0, 0)\}}.$$

Donc f est injective.

Surjective ?

On note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}\left(f(e_1), f(e_2)\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(f(1, 0), f(0, 1)\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{1} \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&\quad \#\ \text{opération sur les colonnes} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{1} \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \boxed{-5} \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{1} \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \boxed{-5} \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

or f est surjective $\iff \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$

Donc f n'est pas surjective car $\dim(\mathrm{Im}(f)) \neq \dim(\mathbb{R}^3)$.

Bijective ? f n'est pas bijective.

7. **Linéarité** : f n'est pas linéaire car

$$f(0, 1) + f(1, 0) \neq f(1, 1).$$

Exercice 2. On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $J : E \to \mathbb{R}$ définie par $J(f) = \int_0^1 f(t)dt$. Montrer que J est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

Correction.

Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} J(\lambda f + g) &= \int_0^1 (\lambda f + g)(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (\lambda f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda J(f) + J(g). \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $J(\lambda f + g) = \lambda J(f) + J(g)$.

Conclusion : J est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$. Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et déterminer son automorphisme réciproque.

Correction.

Soient $X = (x, y), X' = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda X + X') &= f(\lambda x + x', \lambda y + y') \\ &= \left((\lambda x + x') + (\lambda y + y'), (\lambda x + x') - (\lambda y + y')\right) \\ &= (\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda y) + \left(x' + y', x' - y'\right) \\ &= \lambda\,(x + y, x - y) + \left(x' + y', x' - y'\right) \\ &= \lambda f(x, y) + f(x', y') \\ &= \lambda f(X) + f(X'). \end{aligned}$$

Donc $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ (f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$).

Montrons que f est injective.

$$\begin{aligned} (x, y) \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f(x, y) = (0, 0) \\ &\iff (x + y, x - y) = (0, 0) \\ &\iff x = 0 \text{ et } y = 0 \\ &\iff (x, y) = (0, 0). \end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(0, 0)\}\,.$$

Donc f est injective.
f est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}^2$, donc f est bijective (théorème du cours). L'application f est donc un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Expression de f^{-1} : On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f^{-1}\right) &= \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f^{-1}(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right).$$

$$\boxed{f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & \left(\frac{1}{2}(x + y), \frac{1}{2}(x - y)\right) \end{array}.}$$

Exercice 4. On considère les applications

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x, 2x+y, y) \end{array}$$

et

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, 5x-2y+z) \end{array}.$$

1. Montrer que f et g sont des applications linéaires.
2. Déterminer $\mathrm{Ker} f$, $\mathrm{Ker} g$, $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Im} g$. Que peut-on en déduire ?
3. Montrer que $g \circ f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Correction.

1. Soient $X = (x,y), X' = (x',y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda X + X') &= f\left(\lambda x + x', \lambda y + y'\right) \\ &= \left((\lambda x + x'), 2(\lambda x + x') + (\lambda y + y'), \lambda y + y'\right) \\ &= (\lambda x, 2\lambda x + \lambda y, \lambda y) + \left(x', 2x' + y', y'\right) \\ &= \lambda(x, 2x+y, y) + \left(x', 2x'+y', y'\right) \\ &= \lambda f(X) + f(X'). \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $X, X' \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda X + X') = \lambda f(X) + f(X')$.
Conclusion : $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

Soient $X = (x,y,z), X' = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g(\lambda X + X') &= f\left(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z'\right) \\ &= \left((\lambda x + x') + (\lambda y + y'), 5(\lambda x + x') - 2(\lambda y + y') + (\lambda z + z')\right) \\ &= (\lambda x + \lambda y, 5\lambda x - 2\lambda y + \lambda z) + \left(x' + y', 5x' - 2y' + z'\right) \\ &= \lambda(x+y, 5x-2y+z) + \left(x', 2x'+y', y'\right) \\ &= \lambda g(X) + g(X'). \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $X, X' \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $g(\lambda X + X') = \lambda g(X) + g(X')$.
Conclusion : $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

(2)

$$\begin{aligned} (x,y) \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f(x,y) = (0,0,0) \\ &\iff (x, 2x+y, y) = (0,0,0) \\ &\iff (x,y) = (0,0). \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\} \text{ et } f \text{ est injective.}}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}\left(f(1,0), f(0,1)\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left((1,2,0),(0,1,1)\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{1} \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

\# opération sur les colonnes

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ constitue une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

Comme $\dim(\mathrm{Im}(f)) \neq \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$, $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$ et $\underline{f \text{ n'est pas surjective}}$.

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \mathrm{Ker}(g) &\iff g(x,y,z) = (0,0) \\ &\iff \begin{cases} x + y = 0 \\ 5x - 2y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ avec } y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Vect}\left((-1,1,7)\right) \text{ et } g \text{ n'est pas injective.}}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(g) &= \mathrm{Vect}\left(g(1,0,0), g(0,1,0), g(0,0,1)\right)\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1\\ 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\ -2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 1\end{pmatrix}\right)\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \boxed{1}\\ 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ -7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 1\end{pmatrix}\right)\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \boxed{1}\\ 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ \boxed{1}\end{pmatrix}\right)\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \boxed{1}\\ 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ \boxed{1}\end{pmatrix}\right)\\
&= \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}^2$ et $\underline{g \text{ est surjective.}}$

3. En tant que composée d'applications linéaires, $g \circ f$ est linéaire. L'application $g \circ f$ est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Expression de $g \circ f$: On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g \circ f) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 5 & -2 & 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(g \circ f)(x,y) = (3x+y, x-y).$$

Montrons que $g \circ f$ est injective.

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \mathrm{Ker}(g \circ f) &\iff (g \circ f)(x,y) = (0,0)\\
&\iff \begin{cases} 3x + y = 0\\ x - y = 0\end{cases}\\
&\iff (x,y) = (0,0).
\end{aligned}$$

$\mathrm{Ker}(g \circ f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ et $g \circ f$ est injective.

Conclusion : $g \circ f$ est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}^2$. Il s'agit donc d'un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3\\ P & \mapsto & (P(-1), P(0), P(1)) \end{array}.$

Montrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur $\mathbb{R}^3$.

Correction.

Soient P et $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(\lambda P + Q) &= ((\lambda P+Q)(-1), (\lambda P+Q)(0), (\lambda P+Q)(1))\\
&= (\lambda P(-1) + Q(-1), \lambda P(0) + Q(0), \lambda P(1) + Q(1))\\
&= (\lambda P(-1), \lambda P(0), \lambda P(1)) + (Q(-1), Q(0), Q(1))\\
&= \lambda\left(P(-1), P(0), P(1)\right) + (Q(-1), Q(0), Q(1))\\
&= \lambda f(P) + f(Q).
\end{aligned}$$

Ainsi pour tout P et $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q)$.

Conclusion : $\boxed{f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3).}$

Montrons que f est injective.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On a :

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f(P) = (0,0,0) \\ &\iff (P(-1), P(0), P(1)) = (0,0,0) \\ &\iff -1, 0, 1 \text{ sont des racines de } P \\ &\iff P = 0, \end{aligned}$$

car un polynôme non nul de $\mathbb{R}_2[X]$ admet au plus deux racines distinctes.

Conclusion : $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{0\} \text{ et } f \text{ est injective.}}$

Montrons que f est surjective.

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}\left(f(1), f(X), f(X^2)\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &\quad \# \text{ on opère sur les colonnes} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{1} \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{1} \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \boxed{1} \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Ainsi $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$.

Comme $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^3$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$, on a

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3}$$

et $\boxed{f \text{ est surjective.}}$

Conclusion : f est bijective. Il s'agit donc d'un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur $\mathbb{R}^3$.

Remarque : Il est possible de conclure plus rapidement :
$f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3)$, f est injective et $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$, donc f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+z, y-x, z+y, x+y+2z) \end{array}$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Calculer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$. En déduire une base de $\mathrm{Im} f$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$.
4. L'application f est-elle injective ? surjective ?

(1) Soient $X = (x,y,z), X' = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda X + X') &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda x + x') + (\lambda z + z') \\ (\lambda y + y') - (\lambda x + x') \\ (\lambda z + z') + (\lambda y + y') \\ (\lambda x + x') + (\lambda y + y') + 2(\lambda z + z') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda x + \lambda z \\ \lambda y - \lambda x \\ \lambda z + \lambda y \\ \lambda x + \lambda y + 2\lambda z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' + z' \\ y' - x' \\ z' + y' \\ x' + y' + 2z' \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} x + z \\ y - x \\ z + y \\ x + y + 2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' + z' \\ y' - x' \\ z' + y' \\ x' + y' + 2z' \end{pmatrix} \\ &= \lambda f(x,y,z) + f(x',y',z') \\ &= \lambda f(X) + f(X'). \end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $X, X' \in \mathbb{R}^3$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$f(\lambda X + X') = \lambda f(X) + f(X').$$

Donc $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$.

(2) Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$.

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0,0) \\ &= (1,-1,0,1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(e_2) &= f(0,1,0) \\ &= (0,1,1,1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(e_3) &= f(0,0,1) \\ &= (1,0,1,2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= f(\mathbb{R}^3) \\ &= \mathrm{Vect}\left(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \\ & \quad \text{\# en opérant sur les colonnes} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{1} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{1} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

$\left(\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{1} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

(3) Déterminer une base du noyau :

$$\begin{aligned} &(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) \\ &\iff f(x,y,z) = \mathbf{0} \\ &\iff (x+z, y-x, z+y, x+y+2z) = (0,0,0,0) \\ &\iff \begin{cases} x+z=0 \\ y-x=0 \\ z+y=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (y \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right) = 1$.

(4) f n'est pas injective car $\dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right) \neq 0$,

f n'est pas surjective car $\dim\left(\mathrm{Im}(f)\right) \neq \dim(\mathbb{R}^4)$.

Exercice 7. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.

Correction.

Définition. Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et G un sous-espace vectoriel de E. G est dit stable par f si et seulement si $f(G) \subset G$, si et seulement si pour tout $x \in G$, $f(x) \in G$.

Montrons que $\mathrm{Ker}(f)$ est stable par g, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathrm{Ker}(f)$, $g(x) \in \mathrm{Ker}(f)$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. On a

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= g(f(x)) \quad (\text{car } f \circ g = g \circ f) \\ &= g(0) \quad (\text{car } x \in \mathrm{Ker}(f)) \\ &= 0 \quad (\text{car } g \text{ est linéaire}). \end{aligned}$$

Donc $g(x) \in \mathrm{Ker}(f)$.

Ainsi pour tout $x \in \mathrm{Ker}(f)$, $g(x) \in \mathrm{Ker}(f)$. $\mathrm{Ker}(f)$ est stable par g.

Montrons que $\mathrm{Im}(f)$ est stable par g, c'est-à-dire que pour tout $y \in \mathrm{Im}(f)$, $g(y) \in \mathrm{Im}(f)$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On

$$\begin{aligned} g(y) &= g(f(x)) \\ &= f(g(x)) \quad (\text{car } f \circ g = g \circ f) \\ &\in \mathrm{Im}(f) \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $y \in \mathrm{Im}(f)$, $g(y) \in \mathrm{Im}(f)$. $\mathrm{Im}(f)$ est stable par g.

Représentation matricielle et rang

Exercice 8. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $\dim(\mathrm{Ker} f)$ et $\mathrm{rg}(f)$.

Correction.

$$\begin{aligned} A &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad C_2 \leftarrow C_2 - C_1,\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ &\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C_2 \leftarrow \tfrac{1}{3} C_2,\ C_3 \leftarrow -C_3 \\ &\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ -1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A) = 2.}$

D'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f).$$

donc $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1.}$

Remarque : f n'est pas injective car $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \neq 0$ et f n'est pas surjective car $\mathrm{rg}(f) \neq \dim(\mathbb{R}^3)$.

Exercice 9. Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes et interpréter le résultat.

1. Dans $\mathbb{R}^4$: $\mathscr{F} = (x_1, x_2, x_3)$, où
$$x_1 = (1,1,1,1),\ x_2 = (1,-1,1,-1) \text{ et } x_3 = (1,0,1,0).$$
2. Dans $\mathbb{R}^4$: $\mathscr{F} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, où
$$x_1 = (1,1,0,1),\ x_2 = (1,-1,1,0),\ x_3 = (2,0,1,1) \text{ et } x_4 = (0,2,-1,1).$$
3. Dans $\mathbb{R}_2[X]$: $\mathscr{F} = (P_1, P_2, P_3)$, où
$$P_1 = X^2,\ P_2 = X^2 + 2X \text{ et } P_3 = X + 1.$$
4. Dans $\mathbb{R}_2[X]$: $\mathscr{F} = (P_1, P_2, P_3)$, où
$$P_1 = X^2 + 2X + 1,\ P_2 = X^2 - X + 1 \text{ et } P_3 = X^2 - 7X + 1.$$

Correction.

1.

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}\boxed{1}\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}\boxed{1}\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}\boxed{1}\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}\boxed{1}\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\boxed{1}\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = 2$ et $\mathscr{F}$ est une famille liée (car $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) \neq \mathrm{Card}(\mathscr{F})$).

2.

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}\boxed{1}\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\\1\end{pmatrix}\right)\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}\boxed{1}\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\\1\end{pmatrix}\right)\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}\boxed{1}\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\boxed{-2}\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \dim(\mathrm{Vect}(\mathscr{F})) = 2$ et $\mathscr{F}$ est une famille liée (car $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) \neq \mathrm{Card}(\mathscr{F})$).

3. On note $\mathscr{B} = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

$P_1 = X^2 = 0 \times 1 + 0 \times X + 1 \times X^2$. Les coordonnées de P_1 dans la base $\mathscr{B}$ sont donc $(0, 0, 1)$ et

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P_1) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

$P_2 = X^2 + 2X = 0 \times 1 + 2 \times X + 1 \times X^2$. Les coordonnées de P_2 dans la base $\mathscr{B}$ sont donc $(0, 2, 1)$ et

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P_2) = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}.$$

$P_3 = X + 1 = 1 \times 1 + 1 \times X + 0 \times X^2$. Les coordonnées de P_3 dans la base $\mathscr{B}$ sont donc $(1, 1, 0)$ et

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P_3) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P_1, P_2, P_3)\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1}_1 \\ 0 & \boxed{2}_2 & 1 \\ \boxed{1}_3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = 3$ et $\mathscr{F} = (P_1, P_2, P_3)$ est libre (car $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{Card}(\mathscr{F})$).

4.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P_1, P_2, P_3)\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\\
&\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -9 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\\
&\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{-3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = 2$ et $\mathscr{F}$ est une famille liée (car $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) \neq \mathrm{Card}(\mathscr{F})$).

Exercice 10. Déterminer les matrices dans les bases canoniques et le rang des applications linéaires suivantes :

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - y, y - z) \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x - 5y + 4z \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P - XP' \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & \big(P(-1), P(0), P(1)\big) \end{array}$

1.

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & C_2 \leftarrow C_2 + C_1\\
&\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} & C_3 \leftarrow C_3 + C_2
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathrm{rg}(f_1) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f_1)\right) = 2.}$

Remarque : $\mathrm{rg}(f_1) = \dim(\mathbb{R}^2)$ donc f_1 est surjective.

Le théorème du rang assure que $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim\left(\mathrm{Ker}(f_1)\right) + \mathrm{rg}(f_1)$. On a donc $\dim\left(\mathrm{Ker}(f_1)\right) = 1$. Comme $\dim(\mathrm{Ker}(f_1)) \neq 0$, f_1 n'est pas injective.

2.

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f_2) = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f_2) \sim & \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}\\
& C_2 \leftarrow C_2 + 5C_1,\ C_3 \leftarrow C_3 - 4C_1.
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathrm{rg}(f_2) = 1}$.

Remarque : $\dim\left(\mathrm{Im} f_2\right) = 1 = \dim(\mathbb{R})$, donc f_2 est surjective.

D'après le théorème du rang, on a

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim\left(\mathrm{Ker}(f_2)\right) + \mathrm{rg}(f_2).$$

Donc $\dim\left(\mathrm{Ker}(f_2)\right) = 2 \neq 0$ et f_2 n'est pas injective.

3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P - XP' \end{array}$ c'est-à-dire

$$f_3(P) = P - XP'.$$

Calculer $f_3(1)$, $f_3(X)$ et $f_3(X^2)$.

On a $f_3(1) = 1 - X[1]' = 1$, donc les coordonnées de $f_3(1)$ dans $(1, X, X^2)$ sont $(1, 0, 0)$ et

$$\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f_3(1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a $f_3(X) = X - X[X]' = 0$, donc les coordonnées de $f_3(X)$ dans $(1, X, X^2)$ sont $(0, 0, 0)$ et

$$\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f_3(X)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a $f_3(X^2) = X^2 - X\left[X^2\right]' = -X^2$, donc les coordonnées de $f_3(X^2)$ dans $(1, X, X^2)$ sont $(0, 0, -1)$ et

$$\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}\left(f_3(X^2)\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Conclusion :

$$\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f_3) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix}$$

et $\boxed{\mathrm{rg}(f_3) = 2}$

Remarque : f_3 n'est pas surjective car $\mathrm{rg}(f_3) \neq \dim(\mathbb{R}_2[X])$.

f_3 n'est pas injective car $\dim(\mathrm{Ker}(f_3)) = 1 \neq 0$. (conséquence du théorème du rang).

4.

$$\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \boxed{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{rg}(f_4) = 3}$.

Exercice 11. Soit $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) & \mapsto & (-x + y, x - y, -x + z, -y + z) \end{array}$.

1. Montrer que u est linéaire.
2. Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{C} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$.
3. Montrer que $\mathscr{F} = (f_1, f_2, u(e_1), u(e_2))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
4. Écrire la matrice de u dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{F}$.

Correction.

1. Soient $X=(x,y,z)$ et $X'=(x',y',z')$ des éléments de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u(\lambda X+X') &= u\begin{pmatrix}\lambda x+x'\\ \lambda y+y'\\ \lambda z+z'\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-(\lambda x+x')+(\lambda y+y')\\ (\lambda x+x')-(\lambda y+y')\\ -(\lambda x+x')+(\lambda z+z')\\ -(\lambda y+y')+(\lambda z+z')\end{pmatrix}\\ &= \lambda\begin{pmatrix}-x+y\\ x-y\\ -x+z\\ -y+z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-x'+y'\\ x'-y'\\ -x'+z'\\ -y'+z'\end{pmatrix}\\ &= \lambda u(X)+u(X'). \end{aligned}$$

Pour tout $X,X'\in\mathbb{R}^3$ et tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $u(\lambda X+X')=\lambda u(X)+u(X')$.

Conclusion : $\boxed{u\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^4).}$

2.

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)=\begin{pmatrix}-1&1&0\\ 1&-1&0\\ -1&0&1\\ 0&-1&1\end{pmatrix}.}$$

3. Montrons que $\mathscr{F}$ est libre.

Soient $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ tels que $af_1+bf_2+cu(e_1)+du(e_2)=(0,0,0,0)$. Alors

$$a(1,0,0,0)+b(0,1,0,0)+c(-1,1,-1,0)+d(1,-1,0,-1)=(0,0,0,0),$$

donc

$$\begin{cases}a-c+d=0\\ b+c-d=0\\ -c=0\\ -d=0\end{cases},$$

d'où $a=b=c=d=0$ et $\mathscr{F}$ est libre.

De plus $\mathrm{Card}(\mathscr{F})=\dim\left(\mathbb{R}^4\right)$, donc $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

4. $u(e_1)=0\times f_1+0\times f_2+1\times u(e_1)+0\times u(e_2)$, donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(u(e_1))=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

$u(e_1)=0\times f_1+0\times f_2+0\times u(e_1)+1\times u(e_2)$, donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(u(e_2))=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

$u(e_3)=(0,0,1,1)=0\times f_1+0\times f_2+(-1)\times u(e_1)+(-1)\times u(e_2)$, donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(u(e_3))=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{F}}(u)=\begin{pmatrix}0&0&0\\ 0&0&0\\ 1&0&-1\\ 0&1&-1\end{pmatrix}}.$$

Exercice 12. Soient $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $w_1=(1,-2,0)$, $w_2=(-1,2,0)$, $w_3=(0,0,2)$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(e_1)=w_1, u(e_2)=w_2, u(e_3)=w_3.$$

1. (a) Exprimer w_1,w_2,w_3 en fonction de e_1,e_2 et e_3. En deduire la matrice de u dans $\mathscr{B}$.

(b) Déterminer l'expression de u.

2. (a) Trouver une base de $\text{Ker}(u)$ et une base de $\text{Im}(u)$.

(b) Montrer que $\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^3$.

3. Déterminer $\text{Ker}(u - Id)$ et $\text{Im}(u - Id)$ où Id désigne l'identité de $\mathbb{R}^3$. En deduire que $u - Id$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Correction.

1. (a) $w_1 = 1e_1 - 2e_2 + 0e_3$, $w_2 = -e_1 + 2e_2 + 0e_3$ et $w_3 = 0e_1 + 0e_2 + 2e_3$.

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. (b) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$u(x, y, z) = (x - y, -2x + 2y, 2z)\,.$$

2. (a)

$$\text{Ker}(u) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ constitue une base de $\text{Ker}(u)$.

$$\begin{aligned} \text{Im}(u) &= \text{Vect}\,(u(e_1), u(e_2), u(e_3)) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \boxed{1} \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ constitue une base de $\text{Im}(u)$.

2. (b) Montrons que la réunion d'une base de $\text{Ker}(u)$ et d'un base de $\text{Im}(u)$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$.

On note $\mathscr{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Montrons que la famille $\mathscr{F}$ est libre.

Soient a, b, c des réels tels que

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - 2b = 0 \\ c = 0 \end{cases},$$

donc

$$\begin{cases} \boxed{a} + b = 0 \\ -3\boxed{b} = 0 \\ \boxed{c} = 0 \end{cases}.$$

D'où $a = b = c = 0$.

Donc $\mathscr{F}$ est libre.

De plus $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$, donc $\mathscr{F}$ constirue une base de $\mathbb{R}^3$.

Conclusion : $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}^3$.

3. $u - \mathrm{Id}$ est linéaire en tant que différence d'applications linéaires.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u - \mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u - \mathrm{Id}) &\sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & C_1 \leftrightarrow C_2 \\ &\sim \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{rg}(u - \mathrm{Id}) = \dim\left(\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})\right) = 3$.

De plus, $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \subset \mathbb{R}^3$. D'où $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) = \mathbb{R}^3$ par égalité des dimensions.

On en déduit que $u - \mathrm{Id}$ est surjective.

Le théorème du rang assure que

$$\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})\right) + \mathrm{rg}(u - \mathrm{Id}).$$

On en déduit que $\dim\left(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})\right) = 0$ et que $u - \mathrm{Id}$ est injective.

Conclusion : $u - \mathrm{Id}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 13. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{C} = (f_1, f_2)$ celle de $\mathbb{R}^2$. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$e'_1 = e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_3 + e_1, \quad e'_3 = e_1 + e_2$$

et

$$f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \quad f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

1. Montrer que $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis que $\mathscr{C}' = (f'_1, f'_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Quelle est la matrice de u dans ces nouvelles bases ?

Correction.

1. $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Montrons que $\mathscr{B}'$ est libre.

Soient a, b, c des réels tels que

$$ae'_1 + be'_2 + ce'_3 = (0, 0, 0).$$

Alors

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ a + c = 0 \\ a + b = 0 \end{cases},$$

donc

$$\begin{cases} 2a = 0 & (L_2 + L_3 - L_1) \\ 2b = 0 & (L_1 + L_3 - L_2) \\ 2c = 0 & (L_1 + L_2 - L_3) \end{cases}.$$

D'où $a = b = c = 0$ et $\mathscr{B}'$ est libre.

De plus, $\mathrm{Card}(\mathscr{B}') = \dim(\mathbb{R}^3)$. Donc $\mathscr{B}'$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$.

On montre de manière similaire que $\mathscr{C}' = (f_1', f_2') = \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right)$ constitue une base de $\mathbb{R}^2$.

2. Première méthode : en utilisant la définition de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u)$.

On a $u(e_1') = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \times f_1' + (1) \times f_2'$,

$u(e_2') = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = (3) \times f_1' + (3) \times f_2'$

et $u(e_3') = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = (6) \times f_1' + (-4) \times f_2'$.

Donc

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.}$$

Deuxième méthode : en utilisant la formule de changement de bases.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{C}'}(\mathrm{Id})\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}) \\
&= \left(P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}\right)^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \\
&= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Exercice 14. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathscr{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ la famille définie par

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - e_3 \\ e_2' = e_1 - e_3 \\ e_3' = e_1 - e_2 \end{cases}.$$

1. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E.
2. On pose $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$. Déterminer la matrice D.
3. On note P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Déterminer P et calculer P^{-1}.
4. Quelle relation lie les matrices A, D, P et P^{-1} ?
5. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction.

1.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{-1} & 0 \\ -1 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$\mathrm{rg}(\mathscr{B}') = 3 = \mathrm{Card}(\mathscr{B}')$ donc $\mathscr{B}'$ est libre.

De plus, $\mathrm{Card}(\mathscr{B}') = \dim(E)$. La famille $\mathscr{B}'$ constitue donc une base de E.

2. •

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f(e_1')\right) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(e_1'\right)\\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}f(e_1') &= e_1'\\ &= 1e_1' + 0e_2' + 0e_3'.\end{aligned}$$

D'où

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\left(f(e_1')\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

•

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f(e_2')\right) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(e_2'\right)\\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}f(e_2') &= 2e_2'\\ &= 0e_1' + 2e_2' + 0e_3'.\end{aligned}$$

D'où

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\left(f(e_2')\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

•

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f(e_3')\right) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(e_1'\right)\\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}f(e_3') &= 3e_3'\\ &= 0e_1' + 0e_2' + 3e_3'.\end{aligned}$$

D'où

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\left(f(e_3')\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Conclusion :

$$\boxed{D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.}$$

3.

$$P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusion : $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$

4. Formule de changement de bases :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{Id}) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id})$$

d'où

$$\boxed{D = P^{-1}AP}$$

ie

$$\boxed{A = PDP^{-1}.}$$

5. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^n - 2^n + 1 & 1 - 2^n & 3^n - 2^{n+1} + 1 \\ 1 - 3^n & 1 & 1 - 3^n \\ 2^n - 1 & 2^n - 1 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 3^n - 2^n + 1 & 1 - 2^n & 3^n - 2^{n+1} + 1 \\ 1 - 3^n & 1 & 1 - 3^n \\ 2^n - 1 & 2^n - 1 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}.}$$

Exercice 15. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ représenté dans la base canonique $\mathscr{B}$ par :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $\mathscr{C} = (e'_1, e'_2, e'_3)$ avec $e'_1 = (1,0,1)$, $e'_2 = (-1,1,0)$ et $e'_3 = (1,1,1)$. Montrer que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de f dans $\mathscr{C}$.
3. Calculer la matrice de f^n dans $\mathscr{B}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction.

1. On montre que $\mathscr{C}$ est libre. De plus $\mathrm{Card}(\mathscr{C}) = \dim(\mathbb{R}^3)$. La famille $\mathscr{C}$ constitue donc une base de $\mathbb{R}^3$.

2. •

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e'_1)) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e'_1) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e'_1) \end{aligned}$$

Donc $f(e'_1) = e'_1 = 1e'_1 + 0e'_2 + 0e'_3$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(e'_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

•

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e'_2)) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e'_2) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e'_2) \end{aligned}$$

Donc $f(e'_2) = e'_2 = 0e'_1 + 1e'_2 + 0e'_3$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(e'_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f(e'_3)\right) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(e'_3\right) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(e'_1 + e'_3\right) \end{aligned}$$

Donc $f(e'_3) = e'_1 + e'_3 = 1e'_1 + 0e'_2 + 1e'_3$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(e'_3)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f^n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (à démontrer par récurrence).

D'après la formule de changement de bases, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^n) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id})\, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f^n)\, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{Id}) \\ &= P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f^n) \left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} n+1 & n & -n \\ 0 & 1 & 0 \\ n & n & 1-n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^n) = \begin{pmatrix} n+1 & n & -n \\ 0 & 1 & 0 \\ n & n & 1-n \end{pmatrix}.}$$

Projections et symétries

Exercice 16. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (4x-2y, 6x-3y) \end{array}$$

est une projection et déterminer ses caractéristiques géométriques.

Correction.

f est une projection si et seulement si f est linéaire et $f \circ f = f$.

Montrons que f est linéaire.

Soient $X = (x,y)$ et $X' = (x', y')$ des éléments de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda X + X') &= f(\lambda x + x', \lambda y + y') \\ &= (4(\lambda x + x') - 2(\lambda y + y'), 6(\lambda x + x') - 3(\lambda y + y')) \\ &= \lambda(4x - 2y, 6x - 3y) + (4x' - 2y', 6x' - 3y') \\ &= \lambda f(X) + f(X'). \end{aligned}$$

Pour tout $X, X' \in \mathbb{R}^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda X + X') = \lambda f(X) + f(X')$.

$f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f \circ f(x,y) &= f(f(x,y)) \\ &= f(4x-2y, 6x-3y) \\ &= (4(4x-2y)-2(6x-3y), 6(4x-2y)-3(6x-3y)) \\ &= (16x-8y-12x+6y, 24x-12y-18x+9y) \\ &= (4x-2y, 6x-3y) \\ &= f(x,y). \end{aligned}$$

Donc pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f \circ f(x,y) = f(x,y)$.

Conclusion : f est une projection sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}\,(f(1,0), f(0,1)) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \boxed{2} \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Conclusion : f est une projection sur $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 17. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une symétrie et déterminer ses caractéristiques géométriques.

Correction.

$$\begin{aligned} f \text{ est une symétrie } &\iff f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} \\ &\iff A \times A = \mathrm{I}_3. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (9-4-4) & (12-4-8) & (12-8-4) \\ (-3+1+2) & (-4+1+4) & (-4+2+2) \\ (-3+2+1) & (-4+2+2) & (-4+4+1) \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{I}_3, \end{aligned}$$

Donc f est une symétrie.

Rappel cours : f est une symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors :

D'une part,

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)-\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\\ &= \begin{pmatrix}3&4&4\\-1&-1&-2\\-1&-2&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2&4&4\\-1&-2&-2\\-1&-2&-2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) &= \left\{\begin{pmatrix}-2y-2z\\y\\z\end{pmatrix}\middle|(y,z)\in\mathbb{R}^2\right\}\\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)+\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\\ &= \begin{pmatrix}3&4&4\\-1&-1&-2\\-1&-2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}4&4&4\\-1&0&-2\\-1&-2&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) &= \left\{\begin{pmatrix}-2z\\z\\z\end{pmatrix}\middle|z\in\mathbb{R}^2\right\}\\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

Conclusion : f est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Exercice 18. On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$. On considère le plan $\mathscr{P}$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équations respectives :

$$\mathscr{P}: x+2y-z=0 \quad \text{et} \quad \mathscr{D}:\begin{cases}x+y=0\\y+z=0\end{cases}.$$

1. Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont supplémentaires. Trouver une base de $\mathscr{P}$ et une base de $\mathscr{D}$. On note $\mathscr{B}'$ la réunion de ces deux bases.
2. On note p la projection sur $\mathscr{P}$ parallèlement à $\mathscr{D}$. Déterminer la matrice de p dans la base $\mathscr{B}'$. En déduire la matrice de p dans la base canonique $\mathscr{B}$.
3. Faire de même avec la symétrie s par rapport à $\mathscr{P}$ parallèlement à $\mathscr{D}$.

Correction.

1.

$$\begin{aligned}\mathscr{P} &= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\x+2y\end{pmatrix}\middle|(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}\\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}\boxed{1}\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\boxed{1}\\2\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

On note $(u,v) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$. (u,v) est une base de $\mathscr{P}$.

$$\mathscr{D} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

On note $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (w) est une base de $\mathscr{D}$.

On note $\mathscr{B}' = (u, v, w)$.

$\mathscr{B}'$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (le vérifier) et $\mathrm{Card}(\mathscr{B}') = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$. $\mathscr{B}'$ est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

En montrant que $\mathscr{B}'$, réunion d'une base de $\mathscr{P}$ et d'une base de $\mathscr{D}$, est une base de $\mathbb{R}^3$, on montre que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$: $\mathscr{P} \oplus \mathscr{D} = \mathbb{R}^3$.

2. p est la projection sur $\mathscr{P}$ parallèlement à $\mathscr{D}$.

Matrice de p dans la base $\mathscr{B}'$?

Comme $u \in \mathscr{P}$, $p(u) = u = 1\times u + 0 \times v + 0 \times w$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(p(u)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Comme $v \in \mathscr{P}$, $p(v) = v = 0\times u + 1 \times v + 0 \times w$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(p(v)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Comme $w \in \mathscr{D}$, $p(w) = 0 = 0 \times u + 0 \times v + 0 \times w$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(p(w)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D'où

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Matrice de p dans la base $\mathscr{B}$?

D'après la formule de changement de bases, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(p) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{Id}) \\
&= P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(p) \times \left(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}\right)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.}$$

3. On sait que $s = 2p - \mathrm{Id}$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) &= 2\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}) \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(s\right) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.}$$